

Tentamen Voortgezette Lineaire Algebra (WD324)
donderdag 26 oktober 2000; 10:30 – 12:30 uur.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven

1. Gegeven is de Hermitische vorm $\langle \cdot, \cdot \rangle$, gedefinieerd op $\mathbb{C}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1\overline{y_1} + 2ix_2\overline{y_1} - 2ix_1\overline{y_2} + 3x_2\overline{y_2}.$$

- (4) a. Ga na dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ daadwerkelijk een Hermitische vorm is.
- (4) b. Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product is.
- (8) c. Bepaal, uitgaande van de gewone basis, een orthonormale basis voor $\mathbb{C}^2$, ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (8) d. We kunnen $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ schrijven als $\mathbf{x}^T A \overline{\mathbf{y}}$, waarbij A een zelfgeadjungeerde matrix is. Bepaal A en bepaal een orthogonale basis, ten opzichte van het normale inwendig product $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$, voor $\mathbb{C}^2$ die uit eigenvectoren van A bestaat.
- (5) e. Is de basis uit het vorige onderdeel ook orthogonaal ten opzichte van $\langle \cdot, \cdot \rangle$? Leg uit waarom (niet).
2. De operator $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is, ten opzichte van de gewone basis, bepaald door de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (3) a. Toon aan dat P een projectie is. Is P een orthogonale projectie?
- (8) b. Bepaal bases voor $\text{Ker } P$ en $\text{Im } P$.
- (4) c. Geef een matrix S zó dat $S^{-1}PS$ een diagonaalmatrix is en geef die diagonaalmatrix.
- (6) d. Definieer $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (S^{-1}\mathbf{x}) \cdot (S^{-1}\mathbf{y})$ (de $\cdot$ staat voor het gewone inwendig product). Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product is en dat P ten opzichte van dit inwendig product een orthogonale projectie is.

3. De volgende kwadratische vergelijking bepaalt een kwadriek in $\mathbb{R}^3$:

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 + 6x_1 - 2x_2 - 10x_3 + 5 = 0.$$

- (12) a. Bepaal van deze kwadriek het middelpunt $\mathbf{m}$, de asrichtingen en de aslengtes. NB Om wat rekenwerk te besparen: één van de eigenwaarden van de bijbehorende matrix is -2 .
- (8) b. We snijden de kwadriek met het vlak $x_3 = 1$; wat voor kegelsnede ontstaat als snijfiguur? Bepaal zijn middelpunt $\mathbf{n}$.
- (20) 4. Zij V een unitaire ruimte en P een projectie (niet noodzakelijk orthogonaal). Beschrijf P^* ; is het ook een projectie? Zo ja: bewijs dit en geef dan zijn kern en beeld. Zo nee: geef een tegenvoorbeeld en probeer toch zo veel mogelijk over P^* te zeggen.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE