
Tentamen Lineaire Algebra 1

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit

docent: R. Planqué

12 Februari 2015, 18:30 - 21:15.

Motiveer al je antwoorden

Opgave 1

Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Aan welke relaties moeten b_1, b_2, b_3 en b_4 voldoen zodat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is?
- b) Bepaal de rang van A en een basis voor de nulruimte van A .
- c) Bepaal alle kleinste kwadratenoplossingen van het overbepaalde stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Opgave 2

Gegeven is de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van B . Is B diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

Opgave 3

Gegeven is de matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bepaal C^{-1} .

Opgave 4

$\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner of gelijk aan 3.

- a) Wat is de dimensie van $\mathbb{P}_3$? Motiveer je antwoord door het geven van een basis.
- b) Laat zien dat de verzameling

$$\{t^3 + 2, t^2 - t + 1, t^3 + t - 1\} \subset \mathbb{P}_3$$

lineair onafhankelijk is.

Laat $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn die gegeven wordt door

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}.$$

- c) Is T injectief (one-to-one)? Motiveer je antwoord.
- d) Is T surjectief? Motiveer je antwoord?

Opgave 5

Laat V de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ zijn die wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale basis voor V met behulp van het Gram-Schmidt process.

Opgave 6

Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A en B gelijksoortige $n \times n$ matrices zijn. Als $A^2 = I$, geldt ook $B^2 = I$.
- b) A is een 3×5 matrix. Dan geldt $\dim \text{Nul}(A) \geq 2$.
- c) Als U orthonormale kolommen heeft geldt $UU^T = I$.
- d) Als $A^2 = A$ en λ is een eigenwaarde van A , dan geldt $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.
- e) De kwadratische vorm $Q(x, y) = x^2 + 8xy + y^2$ is positief definit.

Opgave 7

Bewijs de onderstaande uitspraken.

- a) Laat $C^1(\mathbb{R})$ de vectorruimte van continu differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ zijn. Laat $V \subset C^1(\mathbb{R})$ de deelverzameling zijn gegeven door

$$V = \{f(x) \in C^1(\mathbb{R}) \mid f'(0) = f'(1)\}.$$

Dan is V een deelruimte van $C^1(\mathbb{R})$.

- b) We beschouwen het volgende inproduct op functies

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) \cos(x) dx.$$

(Je hoeft niet te laten zien dat dit een inproduct is.). Bereken $\|\sin(x)\|$.

Normering

1: a) 2	2: 5	3: 5	4: a) 2	5: 5	6: a) 3	7: a) 3
b) 2			b) 2		b) 3	b) 3
c) 4			c) 3		c) 3	
			d) 3		d) 3	
					e) 3	

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{6} + 1.$$