

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de LU -factorisatie van de matrix A .
- b) Geef een basis voor de nulruimte van A .
- c) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. a) Toon aan:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

- b) De matrix B wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimten.

[Aanwijzing: je kunt hierbij onderdeel a) gebruiken.]

- c) Verklaar waarom B diagonaliseerbaar is en geef vervolgens een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $B = PDP^{-1}$.

3. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom.

- a) Laat zien dat de verzameling polynomen

$$\mathcal{B} = \{1 + x - x^2, 1 + x^2, 1 + x\}$$

lineair onafhankelijk is in $\mathbb{P}_2$.

- b) Licht toe dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.

- c) Bepaal $[x^2]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van x^2 ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

Z.O.Z.

4. De matrix C en de vector $\mathbf{z}$ worden gegeven door

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal, met behulp van het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor de kolomruimte van C .
 - b) Bepaal $\hat{\mathbf{z}}$, de orthogonale projectie van $\mathbf{z}$ op de kolomruimte van C .
 - c) Bepaal de afstand van $\mathbf{z}$ tot de kolomruimte van C .
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) A is een 3×3 matrix. Als de vergelijking $A\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ een unieke oplossing heeft, dan is A inverteerbaar.
 - b) Laat A een 2×2 matrix zijn. Dan geldt $A^T A = A A^T$.
 - c) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als $A^2 = A$ en λ is een eigenwaarde van A , dan geldt $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.
 - d) Als een $m \times n$ matrix U orthonormale kolommen heeft, dan geldt $U U^T = I$.
 - e) Laat $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. De kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ is positief definitief.
6. a) Laat V de verzameling zijn van alle vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor $x_1 = x_2$. Toon aan dat V een deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is.
- b) Laat A een $m \times n$ matrix zijn en laat $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Gegeven is dat $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Toon aan:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} - \mathbf{p} \in \text{Nul}(A).$$

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 3	4 : a) 4	5 : 10	6 : a) 2
b) 2	b) 4	b) 2	b) 2		b) 3
c) 2	c) 2	c) 2	c) 2		
7	8	7	8	10	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$