

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. Laat

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Laat zien dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A en geef de bijbehorende eigenwaarde.
- Laat zien dat 3 een eigenwaarde is van A en bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- Licht toe dat A diagonaliseerbaar is en geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$.

2. Laat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de deelruimte W die opgespannen wordt door de eerste kolom van A . Bereken ook de afstand van $\mathbf{b}$ tot W .
- Bepaal, met behulp van het Gram-Schmidtproces, een orthogonale basis voor de kolomruimte van A .
- Bereken een QR-factorisatie van A , dat wil zeggen bepaal een 4×3 matrix Q en een 3×3 bovendriehoeksmatrix R zodat $A = QR$ en zodat de kolommen van Q een orthonormale basis vormen voor de kolomruimte van A .
- Bereken alle kleinste-kwadratenoplossingen van de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. Laat $\mathbb{P}_n$ de vectorruimte zijn van alle polynomen met graad kleiner dan of gelijk aan n . Definieer de lineaire transformatie $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ door

$$T(p(t)) = (t+3)p(t).$$

- Vind de matrix voor T relatief ten opzichte van de bases $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ (voor $\mathbb{P}_2$) en $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3\}$ (voor $\mathbb{P}_3$).
- Bereken de lengte (norm) van het polynoom $T(t^2 - 1)$ met betrekking tot het volgende inproduct op $\mathbb{P}_3$:

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + \frac{1}{5}p(2)q(2).$$

Z.O.Z.

4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Als de rang van A gelijk is aan n , dan is de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent voor alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
- b) Laat A en B gelijksoortige (similar) $n \times n$ matrices zijn. Als $A^2 = O$ (de $n \times n$ nulmatrix), dan geldt ook $B^2 = O$.
- c) Laat $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ een verzameling lineair onafhankelijke vectoren zijn in $\mathbb{R}^3$. Als $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, dan geldt ook $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
- d) Laat A een symmetrische 3×3 matrix zijn. Als de kwadratische vorm $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ positief definit is, dan is A inverteerbaar.

5. Laat

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal een orthogonale matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^T$.
- b) Definieer een discreet dynamisch systeem door $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bereken $\mathbf{x}_7$.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 2	4 : a) 2	5 : a) 3
b) 2	b) 3	b) 3	b) 2	b) 3
c) 2	c) 2		c) 2	
	d) 3		d) 2	
6	11	5	8	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$