

1. a) Zet de vectoren in een matrix en pas Gauss-eliminatie toe:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iedere kolom bevat een pivot, dus $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.

- b) Uit a) volgt dat er geen vrije variabelen zijn. Verder is $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ een oplossing, dus de vectorvergelijking is consistent. Gecombineerd levert dit dat er een unieke oplossing is.
- c) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bestaat uit alle lineaire combinaties van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$, dus als $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dan is er altijd een (unieke) oplossing.
2. a) We volgen de procedure beschreven in paragraaf 2.5 van Lay:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

$$\text{en dus } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Los op $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en gebruik onderdeel 2a). Kies dus x_3 en x_4 vrij. Dan volgt $x_2 = 2x_3 - x_4$ en $x_1 = 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4x_3 - 5x_4$. Oftewel

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ met } x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

en dus is

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

een basis voor de nulruimte van A .

- c) Uit 2a) is te zien dat de kolomruimte van A niet heel $\mathbb{R}^3$ is, dus het bereik van T is niet heel $\mathbb{R}^3$ en dus is T niet surjectief.
3. a) De kolommen van B noemen we $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$. We creëren een orthogonale basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ m.b.v. het Gram-Schmidt proces. Kies $\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$. Verder:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{(-9)}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tenslotte:

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{(-9)}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{27}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) De kolommen van Q moeten lengte 1 hebben, dus worden $\frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|}$, $i = 1, 2, 3$, waarbij $\|\mathbf{x}_i\| = 3$, $i = 1, 2, 3$. De matrix R vinden we dan via $R = Q^T B$. Dit levert:

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- c) $\mathbf{w}_1$ is de projectie op $\text{Col}(B)$ en $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_1$. Dus:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3} \mathbf{x}_3 \\ &= -1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 - 2 \cdot \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. a) $C\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Dus $\mathbf{v}$ is een eigenvector van C bij eigenwaarde 1.

b)

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3) = 0$$

levert $\lambda = 1$, $\lambda = -\sqrt{3}$ en $\lambda = \sqrt{3}$. Matrix C heeft dus drie verschillende eigenwaarden en is daarmee diagonaliseerbaar.

5. a) NIET WAAR. Kies bijvoorbeeld $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A en B zijn symmetrisch, maar $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ niet.

- b) WAAR. Omdat B gelijkvormig is met A bestaat er een inverteerbare matrix P zo dat $B = PAP^{-1}$. Dus $B^3 = PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} = PA^3P^{-1} = PP^{-1} = I_n$.

- c) WAAR. Voor een orthogonale matrix geldt $U^T U = I_n$. Daarmee volgt:
 $\|U\mathbf{x}\|^2 = (U\mathbf{x})^T \cdot (U\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

6. a) Bekijk

$$a_1(1+t+t^2) + a_2(t+t^2) + a_3(t^2) = 0.$$

Vergelijken van machten van t geeft: $a_1 = 0$, $a_1 + a_2 = 0$ en $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ met als enige oplossing $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Dus de polynomen in $\mathcal{C}$ vormen een lineair onafhankelijke verzameling. Omdat drie lineair onafhankelijke vectoren uit $\mathbb{P}_2$ ook $\mathbb{P}_2$ opspannen ($\dim \mathbb{P}_2 = 3$), is $\mathcal{C}$ een basis voor $\mathbb{P}_2$.

[Alternatief: je kunt ook eerst de polynomen omzetten naar coördinaatvectoren in $\mathbb{R}^3$ en daarmee verder rekenen.]

b) Bereken eerst

$${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}}^{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (1+t+t^2)_{\mathcal{E}} & (t+t^2)_{\mathcal{E}} & (t^2)_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Omdat ${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}}^{\mathbf{P}} = \left({}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{\mathbf{P}} \right)^{-1}$ volgt na het nemen van de inverse dat

$${}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}}^{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) De kern van T bestaat uit polynomen uit $\mathbb{P}_2$ waarvoor geldt

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stel $p(t) = a+bt+ct^2$. Dan moet dus gelden $p(1) = a+b+c = 0$ én $p(0) = a = 0$. Dus het gaat om alle polynomen van de vorm $p(t) = bt - bt^2 = b(t - t^2)$. Een basis voor de kern van T is dus $\{t - t^2\}$.

7. We kiezen willekeurig twee elementen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ uit $H \cap K$ en twee scalars $c, d \in \mathbb{R}$. Dan volgt:

- (i) Omdat H en K deelruimten zijn bevatten ze beide de nulvector. Maar dan zit de nulvector ook in de doorsnede $H \cap K$.
- (ii) Omdat $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $H \cap K$ zitten, zijn ze beide ook elementen van H en K afzonderlijk. Maar H en K zijn deelruimten, dus daarom is ook $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ een element van zowel H als K , en dus van de doorsnede $H \cap K$.