

Veegtentamen Kansrekening 2

28 mei 2015, 8.45-11.30

- Dit tentamen bestaat uit zes opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(5 + \text{aantal punten})/5$. Na de correctie kun je het nagekeken tentamen digitaal opvragen bij het onderwijsbureau.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.

1. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2} & \text{als } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

waarbij α een onbekende parameter is met $|\alpha| \leq 1$.

- (a) [3 punten] Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .
- (b) [3 punten] Bereken de variantie van X .
- (c) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y := \arcsin(X)$.

2. [4 punten] Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn, waarbij X uniform verdeeld is op het interval $[0, 1]$ en de dichtheidsfunctie van Y gegeven wordt door

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{als } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de dichtheidsfunctie $f_Z(z)$ van de stochast $Z := X + Y$. Het is handig om daarbij onderscheid te maken tussen de gebieden $z < 0$, $0 \leq z \leq 1$, $1 < z \leq 2$ en $z > 2$.

3. Laat $X_1, X_2, \dots, X_{1200}$ onafhankelijke uniform verdeelde stochasten zijn op het interval $[0, 1]$ en laat Y het aantal van deze 1200 stochasten zijn dat een waarde groter dan $\frac{3}{4}$ heeft.

- (a) [3 punten] Geef met behulp van de Centrale limietstelling een benadering van $P(X_1 + \dots + X_{1200} > 595)$.
- (b) [3 punten] Geef met behulp van de Centrale limietstelling een benadering van $P(290 < Y < 320)$. Vergeet niet om de continuïteitscorrectie toe te passen.

4. Laat X en Y onafhankelijke normaal verdeelde stochasten zijn met $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$ en $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 4$ en laat de stochasten V en W gedefinieerd zijn als $V := X + 2Y$ en $W := X - Y$.

(a) [3 punten] Bereken $\text{Cov}(V, W)$.

(b) [3 punten] Bereken voor welk getal c geldt dat $P(|Y - 2| \leq c) \approx 0,95$.

5. [3 punten] Bij een bepaald soort toetjes voor kinderen zitten kleine plastic dierenfiguurtjes die je kunt verzamelen. Stel dat er vijf verschillende figuurtjes te verzamelen zijn en dat je iedere keer dat je een toetje koopt een volstrekt willekeurig figuurtje krijgt (dus iedere keer heb je een kans van $\frac{1}{5}$ op ieder mogelijk figuurtje, onafhankelijk van wat je al verzameld hebt). Je gaat toetjes kopen totdat je alle figuurtjes compleet hebt. Bereken de verwachting van het aantal toetjes dat je dan gekocht hebt.

6. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-3y} & \text{als } y \geq 0 \text{ en } x \geq -y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [4 punten] Laat zien dat de dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{2x} & \text{als } x < 0, \\ \frac{2}{3}e^{-x} & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

(b) [2 punten] Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter 2.

(c) [3 punten] Laat zien dat voor $y \geq 0$ geldt dat $E(X|Y = y) = 1 - y$.

(d) [2 punten] Gebruik het resultaat van onderdeel (c) om $E(X)$ te berekenen.

(e) [3 punten] Bereken $P(Y < 2X)$.

(f) [3 punten] Bereken de momentvoortbrengende functie van X , geef daarbij duidelijk aan wat het domein is van deze functie.

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]