

Eerste deeltentamen Kansrekening 2

27 maart 2014, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{als } x \geq 0, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

hierbij is $\lambda > 0$ een parameter.

- (a) [2 punten] Laat zien dat voor $x > 0$ geldt dat $P(X > x) = e^{-\lambda x^2}$.
(b) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y = X^2$.
(c) [2 punten] Laat zien dat voor $s, t > 0$ geldt dat

$$P(X > s + t | X > s) < P(X > t).$$

(d) [1 punt] Stel dat X de levensduur modelleert van een apparaat. Wat zegt de bij (c) aangetoonde ongelijkheid over de kansverdeling van de resterende levensduur vanaf tijdstip s gegeven dat het apparaat op tijdstip s nog functioneert? Is die gunstiger of ongunstiger dan vanaf tijdstip 0? Leg uit.

2. Laat Y een exponentieel verdeelde stochast zijn met parameter $\lambda > 0$.

- (a) [4 punten] Laat zien dat voor $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ geldt dat

$$E(Y^n) = \frac{n}{\lambda} E(Y^{n-1})$$

en gebruik dit om $\text{Var}(Y^2)$ uit te rekenen.

- (b) [3 punten] Bereken de kans dat de kwadratische vergelijking (in x)

$$x^2 - 2Yx + Y = 0$$

geen reële oplossingen heeft.

3. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \text{ en } 0 \leq y \leq 2x - x^2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [3 punten] Laat zien dat de dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{als } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(b) [3 punten] Bereken de variantie van X .

(c) [2 punten] Zijn X en Y onafhankelijk? Verklaar je antwoord!

(d) [4 punten] Bereken $P(Y > X)$.

4. [4 punten] Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast Z die gedefinieerd is als het maximum van X en Y .

5. [5 punten] Laat X een normaal verdeelde stochast zijn met parameters μ en σ^2 . De stochast Y wordt gegeven door $Y = aX + b$, met $a < 0$ en $b \in \mathbb{R}$. Bewijs dat Y normaal verdeeld is met parameters $a\mu + b$ en $a^2\sigma^2$.