

Tentamen Kansrekening 2

1 juli 2013, 15.15-18.00

- Dit tentamen bestaat uit zes opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(5 + \text{aantal punten})/5$.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} & \text{als } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

hierbij is $\lambda > 0$ een parameter.

- (a) [2 punten] Laat zien dat f inderdaad een dichtheidsfunctie is.
- (b) [3 punten] Bereken $E(X^6)$.
- (c) [4 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y := -\ln(X)$.

2. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Bereken de marginale dichtheidsfunctie van Y .
- (b) [2 punten] Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter 1.
- (c) [2 punten] Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe.
- (d) [3 punten] Bereken $E(Y|X = x)$ voor $x \geq 0$.

3. Laat X en Y onafhankelijke continue stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [4 punten] Bereken de dichtheidsfunctie $f_Z(z)$ van de stochast $Z := X + Y$. Het is handig om onderscheid te maken tussen de situaties $z < 0$, $0 \leq z \leq 1$ en $z > 1$.
(b) [3 punten] Bereken $P(X > Y)$.
(c) [3 punten] Bereken $\text{Var}(X + Y)$.

4. Laat X een stochast zijn met momentvoortbrengende functie

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-t)^5}, \text{ voor } t < 1.$$

- (a) [3 punten] Bereken de variantie van X .
(b) [2 punten] Bereken de momentvoortbrengende functie van de stochast $Y := 2X + 1$.

5. Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Laat W een normaal verdeelde stochast zijn met $E(W) = 3$ en $\text{Var}(W) = 4$.

- (a) [3 punten] Bereken voor welk getal c geldt dat $P(|W - 3| > c) \approx 0,10$.
(b) [2 punten] Geef de dichtheidsfunctie van de stochast $V := 2W - 3$.

6. Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Op een vlucht van Amsterdam naar New York moet voor de 250 passagiers water meegenomen worden. We noteren de waterbehoefte van de i de persoon (in liters) tijdens deze vlucht met X_i voor $i \in \{1, \dots, 250\}$. Uit ervaring weet de luchtvaartmaatschappij dat aangenomen kan worden dat de X_i 's onafhankelijk zijn met $E(X_i) = 1,1$ en $\text{Var}(X_i) = 0,13$.

- (a) [3 punten] Stel dat er 280 liter water wordt meegenomen tijdens de vlucht. Benader met behulp van de centrale limietstelling de kans dat deze hoeveelheid water tijdens de vlucht helemaal wordt opgebruikt.
(b) [3 punten] Gebruik de centrale limietstelling om te berekenen hoeveel liter water er bij benadering meegenomen moet worden om te garanderen dat de kans dat de hoeveelheid water tijdens de vlucht helemaal wordt opgebruikt ongeveer 0,01 is.

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]