

Eerste deeltentamen Kansrekening 2 voor BWI

26 Maart 2009, 15.15–17.15

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten te behalen (cijfer=(aantal punten)/4+1). Het gebruik van een simpele, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Voorzie elk antwoord van een duidelijke toelichting! Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. De stochast X heeft kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{voor } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [3 punten] Maak een schetsje van de functie f_X , en toon aan dat deze functie inderdaad een kansdichtheid is.
- (b) [3 punten] Bereken $\text{Var}(X)$.
- (c) [4 punten] Zij $Z = \sqrt{X}$. Bepaal de kansdichtheid van de stochast Z .

2. *Bij deze opgave heb je de bijlage nodig.* Karin gooit net zo lang met een dobbelsteen totdat de som van het aantal gegooide ogen tenminste 85 is. Laat X_i het aantal ogen zijn dat Karin gooit bij de i -de worp. De dobbelsteen heeft de eigenschap dat $E(X_i) = 7/2$ en $\text{Var}(X_i) = 3$ (dus niet $\text{Var}(X_i) = 35/12$, zoals bij een gewone dobbelsteen).

- (a) [3 punten] Geef met de Centrale Limietstelling een benadering voor de kans dat de som van het aantal gegooide ogen na 27 worpen minstens 85 is.

Karin vraagt zich af na hoeveel worpen de kans hoogstens 0,05 is dat de som van het aantal gegooide ogen minder dan 50 is.

- (b) [3 punten] Leg in detail uit hoe Karin dit aantal in benadering kan berekenen. Het is voldoende om de vergelijking af te leiden waaraan het benodigde aantal worpen voldoet: je hoeft deze vergelijking niet op te lossen!

3. Beschouw de volgende kansdichtheid van de stochastische vector (X, Y) :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{voor } 0 < y < \infty \text{ en } y < x < \infty; \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [1 punt] Maak een schetsje van het gebied in het xy -vlak waar de dichtheid positief is.
- (b) [3 punten] Bereken de marginale dichtheden van de stochasten X en Y . Hoe heet de verdeling van de stochast Y ?
- (c) [4 punten] Bereken $P(Y > X^2)$. Je mag hiervoor eventueel gebruiken dat $\int (x - x^2)e^{-x} dx = (1 + x + x^2)e^{-x}$ of dat $\int e^{-\sqrt{y}} dy = -2(\sqrt{y} + 1)e^{-\sqrt{y}}$.
- (d) [4 punten] Zij $Z = X - Y$. Toon aan dat Z exponentieel is verdeeld met parameter 1.

4. De tijd X die Sjanne nodig heeft voor de eerste pagina van dit tentamen is uniform verdeeld tussen 0 en 1 uur. De tijd Y die zij nodig heeft voor de tweede pagina is exponentieel verdeeld met een verwachting van 1 uur. De tijden X en Y zijn onafhankelijk.

- (a) [4 punten] Bereken de kans dat Sjanne haar hele tentamen binnen 1 uur af heeft en tegelijkertijd minder tijd nodig heeft voor de eerste pagina dan voor de tweede pagina, dus bepaal $P(X + Y < 1; X < Y)$.
- (b) [4 punten] Laat $Z = \frac{X}{X+Y}$ de fractie van de tijd zijn die Sjanne besteedt aan de eerste pagina van dit tentamen. Bepaal de waardenverzameling van Z en bereken $P(Z \leq z)$ voor z in deze waardenverzameling.

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]