

Tentamen Kansrekening

30 juni 2015, 15.15-18.00

- Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven en een bijlage. Er zijn 45 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(5 + \text{aantal punten})/5$. Na de correctie kun je het nagekeken tentamen digitaal opvragen bij het onderwijsbureau.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.

1. Een bedrijf biedt workshops aan om secretaresses meer vertrouwd te maken met het gebruik van Excel. Er is een zaal beschikbaar voor tien personen, maar er hebben zich twaalf mensen opgegeven voor de workshop. Uit ervaring is bekend dat iedere persoon die zich heeft opgegeven, onafhankelijk van de anderen, met kans 0,85 daadwerkelijk komt opdagen. Daarom wordt besloten niemand af te zeggen en indien nodig ter plekke mensen weg te sturen als er meer dan tien personen komen. We schrijven X voor het aantal mensen dat komt opdagen en Y voor het aantal mensen dat wordt weggestuurd bij de workshop.

- (a) [3 punten] Geef de kansmassafunctie van X , $E(X)$ en $\text{Var}(X)$.
- (b) [4 punten] Bereken $\text{Var}(Y)$.
- (c) [3 punten] Bereken $P(X = 11 \mid Y > 0)$.

2. Een jongetje heeft vijf rode en vier witte knikkers in zijn rechter broekzak en vier witte knikkers en één rode knikker in zijn linker broekzak. Hij pakt één willekeurige knikker uit zijn rechter broekzak en stopt die ongezien in zijn linker broekzak. Daarna pakt hij (in één greep) twee willekeurige knikkers uit zijn linker broekzak.

- (a) [3 punten] Bereken de kans hij een rode en een witte knikker uit zijn linker broekzak haalt.
- (b) [4 punten] Stel dat hij twee witte knikkers uit zijn linker broekzak heeft gehaald. Bereken de (conditionele) kans dat hij een rode knikker uit zijn rechter broekzak naar zijn linker broekzak verplaatst heeft.

3. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-2(y-x)} & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \text{ en } y \geq x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [2 punten] Laat zien dat X uniform verdeeld is op het interval $[0, 2]$.
- (b) [4 punten] Bereken de marginale dichtheid van Y .
- (c) [3 punten] Laat zien dat $E(Y | X = x) = x + \frac{1}{2}$ voor $0 \leq x \leq 2$.
- (d) [2 punten] Gebruik het bij onderdeel (c) gevonden resultaat om $E(Y)$ te berekenen.
- (e) [3 punten] Bereken $P(Y > 2 - X)$.

4. Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke indentiek verdeelde continue stochasten zijn met $E(X_i) = 2$ en $\text{Var}(X_i) = 9$.

- (a) [3 punten] Geef een benadering van $P(X_1 + \dots + X_{100} > 170)$ die gebaseerd is op de Centrale limietstelling.
- (b) [3 punten] Bereken met behulp van de Centrale limietstelling voor welke waarde n geldt dat

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{10}\right) \approx 0,05.$$

5. Laat X en Y onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten zijn met respectievelijke parameters $\lambda > 0$ en $\mu > 0$, waarbij geldt dat $\lambda \neq \mu$. De stochasten U , V en W zijn gedefinieerd als $U := X + Y$, $V := e^X$ en $W := e^{-2X}$.

- (a) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van U .
- (b) [3 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van V .
- (c) [3 punten] Bereken $E(W)$.

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]