

## Uitwerkingen Hertentamen Kansrekening 1

1.

- a)  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, \dots, 9\}, x_i \neq x_j \text{ als } i \neq j\}$ . We krijgen dan voor het aantal elementen in  $S$ :  $\#S = 9 \cdot 8 \cdot 7$ .
- b)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_i \geq 4\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{4, \dots, 9\}, x_i \neq x_j \text{ als } i \neq j\}$ . Dus  $\#A = 6 \cdot 5 \cdot 4$ . We gebruiken het homogene kansmodel dus

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7} \approx 0.238.$$

- c) Er geldt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  $P(A)$  weten we al uit b), verder volgt  $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_i \leq 6\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, \dots, 6\}, x_i \neq x_j \text{ als } i \neq j\}$ . Dus ook  $\#B = 6 \cdot 5 \cdot 4$ . Nu nog  $A \cap B$  bepalen:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_i \geq 4 \text{ en } x_i \leq 6\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{4, 5, 6\}, x_i \neq x_j \text{ als } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Dan volgt  $\#(A \cap B) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Alles tezamen geeft:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} \approx 0.464.$$

2.

- a) Schrijf  $S = \{(x_1, x_2) : x_i \in \{1, \dots, 6\}\}$ . Dan  $\#S = 6 \cdot 6 = 36$ . Verder,

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2) \in S : x_1 > x_2\} \\ &= \{(6,1), \dots, (6,5), (5,1), \dots, (5,4), (4,1), \dots, (4,3), (3,1), (3,2), (2,1)\}. \end{aligned}$$

Dus  $\#A = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ . Dan  $P(A) = \#A/\#S = 15/36 = 5/12$ .

- b) Twee gebeurtenissen zijn onafhankelijk als  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .  $P(A)$  weten we al, nu nog  $P(B)$  en  $P(A \cap B)$  bepalen. Er geldt  $B = \{(x_1, x_2) \in S : x_1 + x_2 = 7\} = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$ . Dus  $P(B) = 6/36 = 1/6$ . Verder  $A \cap B = \{(6,1), (5,2), (4,3)\}$ . Dus  $P(A \cap B) = 3/36 = 1/12$ . Maar

$$P(A) \cdot P(B) = 5/12 \cdot 1/6 = 5/72 \neq 1/6 = P(A \cap B).$$

Dus  $A$  en  $B$  zijn niet onafhankelijk.

- c) De definitie van de verwachting van  $X$  is  $E(X) = \sum_{x \in W_X} x \cdot P(X = x)$ . Merk op:  $W_X = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Nu dus  $P(X = x)$  bepalen voor  $x \in W_X$ :

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= P(A^c) = 1 - 5/12 = 7/12, \\ P(X = 1) &= P(\{(6,1), \dots, (2,1)\}) = 5/36, \\ P(X = 2) &= P(\{(6,2), \dots, (3,2)\}) = 4/36, \\ P(X = 3) &= P(\{(6,3), (5,3), (4,3)\}) = 3/36, \\ P(X = 4) &= P(\{(6,4), (5,4)\}) = 2/36, \\ P(X = 5) &= P(\{(6,5)\}) = 1/36. \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in W_X} x \cdot P(X = x) \\ &= (-1) \cdot 7/12 + 1 \cdot 5/36 + 2 \cdot 4/36 + 3 \cdot 3/36 + 4 \cdot 2/36 + 5 \cdot 1/36 \\ &= \frac{-21 + 5 + 8 + 9 + 8 + 5}{36} = \frac{35 - 21}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

3.

a)  $X$  is Poisson verdeeld met parameter 2:  $P(X = x) = e^{-2} \frac{2^x}{x!}$ . De gevraagde kans is dus

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left( e^{-2} \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} \right) = 1 - 3e^{-2} \approx 0.594. \end{aligned}$$

b) Er geldt  $Y = 2^X$ . We gebruiken daarom de substitutie-regel voor verwachtingen en vinden

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2^X) = \sum_{x \in W_x} 2^x \cdot P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \cdot e^{-2} \frac{2^x}{x!} \\ &= e^{-2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{4^x}{x!} = e^{-2} e^4 = e^2. \end{aligned}$$

c) Het is duidelijk dat Willemijn iedere keer een succeskans heeft van  $p = 1/9$  dat ze de juiste sleutel pakt en dat het pakken onafhankelijk gebeurt. Daarom is  $W$  geometrisch verdeeld met parameter  $p = 1/9$ . Dan volgt  $W_W = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ ,  $p_W(x) = P(W = x) = p(1-p)^{x-1} = 1/9(8/9)^{x-1}$  en  $E(W) = 1/p = 9$ .

d) Er zijn verschillende manieren om het op te lossen. Algemene idee is dat je gebruikt dat als  $\{T = n\}$  optreedt, de eerste  $n - 1$  sleutels die Tim gepakt heeft niet de juiste waren, maar de  $n$ -de is dat wel. Oftewel:

$$P(T = n) = P(\{n\text{-de sleutel juist}\} | \{\text{eerste } n - 1 \text{ onjuist}\}) \cdot P(\{\text{eerste } n - 1 \text{ onjuist}\})$$

Merk op dat als er  $n - 1$  sleutels gepakt zijn er nog  $9 - (n - 1) = 10 - n$  over zijn. Verder kan Tim de eerste  $n - 1$  verkeerde sleutels op  $8 \cdot 7 \cdots ((8 - (n - 1) + 1)/(n - 1)!) = \binom{8}{n-1}$  manieren pakken. Het aantal manieren waarop Tim  $n - 1$  sleutels uit 9 kan pakken is  $\binom{9}{n-1}$ . Dit invullen geeft:

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(\{n\text{-de sleutel juist}\} | \{\text{eerste } n - 1 \text{ onjuist}\}) \cdot P(\{\text{eerste } n - 1 \text{ onjuist}\}) \\ &= \frac{1}{10 - n} \cdot \frac{\binom{8}{n-1}}{\binom{9}{n-1}} = \frac{\frac{8!}{(n-1)!(8-(n-1))!}}{\frac{9!}{(n-1)!(9-(n-1))!}} \\ &= \frac{1}{10 - n} \cdot \frac{(10 - n)!}{9(9 - n)!} = \frac{(10 - n)!}{9(10 - n)!} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

NB: een antwoord van de vorm  $P(T = 1) = \frac{1}{9}$  en

$$P(T = n) = \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{10-n}{11-n} \cdot \frac{1}{10-n} = \frac{1}{9},$$

voor  $n \geq 2$  is met juiste argumentatie ook correct.

- e) Voor de variantie van  $T$  geldt  $Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2$ . Dus  $E(T)$  en  $E(T^2)$  uitrekenen:

$$E(T) = \sum_{n=1}^9 n \cdot P(T = n) = \sum_{n=1}^9 n \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 5.$$

$$E(T^2) = \sum_{n=1}^9 n^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = \frac{190}{6} = \frac{95}{3}.$$

$$\text{Dus } Var(T) = \frac{95}{3} - 5^2 = \frac{95-75}{3} = \frac{20}{3}.$$

4.

- a) Laat  $B$  de gebeurtenis zijn dat beide bonbons wit zijn en laat  $D_i$  de gebeurtenis zijn dat je doosje  $i$  pakt. Merk op  $P(D_i) = 1/3$  voor alle  $i$ . Verder geldt ook  $P(B|D_1) = 1$ ,  $P(B|D_2) = 0$  en  $P(B|D_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . Met de wet van totale kans volgt

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_i P(B|D_i) \cdot P(D_i) \\ &= P(B|D_1) \cdot P(D_1) + P(B|D_2) \cdot P(D_2) + P(B|D_3) \cdot P(D_3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

- b) Laat  $A$  de gebeurtenis zijn dat eerste bonbon wit is. We willen  $P(B|A)$  weten. De definitie van conditionele kans geeft  $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$ . Merk op dat  $A \subset B$  en dus  $P(A \cap B) = P(A)$ . Rest ons alleen nog  $P(A)$  uit te rekenen. Hiervoor gebruiken we weer de wet van totale kans:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_i P(A|D_i) \cdot P(D_i) \\ &= P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

We krijgen dus

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}.$$