

Uitwerkingen Tentamen Kansrekening 1

1.

- a) Laat $E = \{\text{alle schroeven niet stuk}\}$ en $F = \{\text{alle pluggen niet stuk}\}$. We willen $P(E \cap F)$ weten. Omdat het pakken van pluggen en schroeven onafhankelijk van elkaar gebeurt, geldt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Eerst $P(E)$: dit is trekken zonder terugleggen en zonder volgorde dus $\#S = \binom{50}{10}$. Alle schroeven moeten niet stuk zijn en er zijn 46 schroeven die niet stuk zijn. Dus het aantal manieren waarop 10 schroeven gepakt kunnen worden die niet stuk zijn is $\binom{46}{10}$. Oftewel: $\#E = \binom{46}{10}$. Er volgt

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{\binom{46}{10}}{\binom{50}{10}}.$$

Op eenzelfde manier volgt voor de pluggen (er zijn 50 pluggen in totaal, waarvan we er 10 pakken, en 45 pluggen die niet stuk zijn):

$$P(F) = \frac{\#F}{\#S} = \frac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}}.$$

We krijgen

$$P(E \cap F) = \frac{\binom{46}{10}}{\binom{50}{10}} \cdot \frac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}}$$

- b) Er geldt (inclusie-exclusie voor $n = 2$) dat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Bekijk eerst $P(A)$. Van de 10 pluggen die Frans pakt, moeten er 2 stuk zijn. Het aantal manieren waarop hij 2 uit 5 stukke pluggen kan pakken is $\binom{5}{2}$. Het aantal manieren waarop hij 8 pluggen kan pakken die niet stuk zijn uit 45 pluggen is $\binom{45}{8}$. Er volgt

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{8}}{\binom{50}{10}}.$$

Op identieke wijze (2 kapotte schroeven moeten gepakt worden uit 4 en 8 schroeven die niet stuk zijn uit 46) geldt dat

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{46}{8}}{\binom{50}{10}}.$$

Vanwege onafhankelijkheid van het pakken van pluggen en schroeven geldt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{8}}{\binom{50}{10}} \cdot \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{46}{8}}{\binom{50}{10}}.$$

Conclusie:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{8}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{46}{8}}{\binom{50}{10}} - \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{8}}{\binom{50}{10}} \cdot \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{46}{8}}{\binom{50}{10}}. \end{aligned}$$

2.

- a) X is het nummer van de poging waarin Maria voor het eerst raak schiet, dus X is geometrisch verdeeld met parameter $p = 0.4$. Dit betekent dat $W_X = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, $p_X(k) = P(X = k) = 0.6^{k-1} \cdot 0.4$ en $E(X) = \frac{1}{0.4} = 2\frac{1}{2}$.
- b) Introduceer $A = \{\text{Maria schoot}\}$ en $B = \{2 \text{ van de 3 schoten raak}\}$. We willen $P(A|B)$ weten. Merk op: $A^c = \{\text{Pia schoot}\}$. Omdat er met een zuivere munt gegooid is, geldt $P(A) = \frac{1}{2} = P(A^c)$. Verder is het aantal keer dat Maria raak schiet in 3 beurten binomiaal verdeeld met parameters $n = 3$ en $p = 0.4$. Dit betekent dat de conditionele kans $P(B|A)$ gelijk is aan

$$P(B|A) = \binom{3}{2} 0.4^2 0.6^1 = 0.288.$$

Het aantal keer dat Pia raak schiet is binomiaal verdeeld met parameters $n = 3$ en $p = 0.5$. Dus:

$$P(B|A^c) = \binom{3}{2} 0.5^2 0.5^1 = 0.375.$$

Met de regel van Bayes krijgen we:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}.$$

De juiste getallen invullen geeft:

$$P(A|B) = \frac{0.288 \cdot 0.5}{0.288 \cdot 0.5 + 0.375 \cdot 0.5} \approx 0.434$$

- c) Om $E(Y)$ te kunnen berekenen, moeten we eerst de kansmassafunctie van Y bepalen. Laat E_i de gebeurtenis zijn dat Maria raak schiet in beurt i en F_j de gebeurtenis dat Pia raak schiet in beurt j . Y kan de waarden 1 tot en met 4 met positieve kans aannemen (spel stopt na 4 beurten). Vanwege onafhankelijkheid van de gebeurtenissen E_i, F_j krijgen we:

$$P(Y = 1) = P(E_1) = 0.4$$

$$P(Y = 2) = P(E_1^c \cap F_2) = P(E_1^c)P(F_2) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$$

$$P(Y = 3) = P(E_1^c \cap F_2^c \cap E_3) = P(E_1^c)P(F_2^c)P(E_3) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(Y = 4) = 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

De verwachting $E(Y)$ wordt nu:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in W_Y} yP(Y = y) = \sum_{y=1}^4 yP(Y = y) \\ &= 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.12 + 4 \cdot 0.18 = 2.08 \end{aligned}$$

3.

- a) Dit kansexperiment kunnen we beschrijven met het homogene kansmodel waarbij we trekken met terugleggen en met volgorde, dus $S = \{(x_1, \dots, x_4) : x_i \in \{1, \dots, 10\} \text{ voor } i = 1, \dots, 10\}$ en $\#S = 10^4$. Laat $A = \{\text{eerste cijfer is niet gelijk aan derde cijfer}\}$. Dan

$$A = \{(x_1, \dots, x_4) \in S : x_1 \neq x_3\}, \#A = 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3.$$

We krijgen

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{9 \cdot 10^3}{10^4} = \frac{9}{10}.$$

- b) We bekijken nu de gebeurtenis $B = \{\text{omgekeerde volgorde is getal zelf}\}$. In termen van elementen van S wordt dit:

$$B = \{(x_1, \dots, x_4) : x_1 = x_4 \text{ en } x_2 = x_3\}.$$

En dus $\#B = 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 100$. Dan

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{10^2}{10^4} = \frac{1}{10^2} = 0.01.$$

(N.B.: uitwerkingen waarbij 10 niet meegenomen is, zijn ook goed gerekend)

- c) De gebeurtenis $\{X \leq k\}$ treedt op precies wanneer het nummer van *alle* getrokken ballen kleiner of gelijk is dan k :

$$\{X \leq k\} = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \leq k\}.$$

Dus per bal zijn er k mogelijkheden, dit geeft: $\#(\{X \leq k\}) = k \cdot k \cdot k \cdot k = k^4$. Dus:

$$P(X \leq k) = \frac{\#(\{X \leq k\})}{\#S} = \frac{k^4}{10^4} = \left(\frac{k}{10}\right)^4.$$

- d) Splits uit naar gebeurtenissen $\{Z = k\}$, waarbij Z het nummer is op de bal die serveillant pakt. Met de wet van totale kans volgt:

$$P(Y = 5) = \sum_{k=1}^{10} P(Y = 5|Z = k)P(Z = k).$$

Het is duidelijk dat $P(Z = k) = \frac{1}{10}$ voor alle k , want de serveillant pakt een bal volstrekt willekeurig. Vanwege het vervangen van k door $11 - k$ blijven de kansen $P(Y = 5|Z = k)$ ongewijzigd als k niet 5 of 6 is: $P(Y = 5|Z = k) = \frac{1}{10}$ als $k \neq 5, 6$. Als de serveillant 5 trekt, wordt deze als 6 teruggedaan. Bal 5 zit er dan niet meer in, dus $P(Y = 5|Z = 5) = 0$. Precies omgekeerd geldt dat als 6 getrokken wordt er *twee*

ballen met 5 in de vaas zitten: $P(Y = 5|Z = 6) = \frac{2}{10}$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 5) &= \sum_{k=1}^{10} P(Y = 5|Z = k)P(Z = k) \\
 &= \sum_{k \neq 5,6} P(Y = 5|Z = k)P(Z = k) + P(Y = 5|Z = 5)P(Z = 5) \\
 &\quad + P(Y = 5|Z = 6)P(Z = 6) \\
 &= \sum_{k \neq 5,6} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
 &= 8 \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

4.

- a) De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. We moeten dus laten zien dat $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ voor $n = 3$. Laat X het aantal keer kop zijn in 3 worpen met een zuivere munt. Dan

$$\begin{aligned}
 A &= \{\text{tenminste 1 keer kop en tenminste 1 keer munt}\} \\
 &= \{X \geq 1\} \cap \{X \leq 2\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\}.
 \end{aligned}$$

X is binomiaal verdeeld met parameters $n = 3$ en $p = \frac{1}{2}$, dus

$$P(A) = P(X = 1) + P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Verder is

$$\begin{aligned}
 B &= \{\text{maximaal 1 keer munt}\} = \{\text{tenminste 2 keer kop}\} \\
 &= \{X \geq 2\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}.
 \end{aligned}$$

En dus

$$P(B) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Wanneer we nu naar de doorsnede $A \cap B$ kijken zien we dat dit precies de gebeurtenis 2 maal kop is en 1 keer munt: $A \cap B = \{X = 2\}$. Dan volgt:

$$P(A \cap B) = P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

We zien dat

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B),$$

dus A en B zijn onafhankelijk.

- b) Een X_i is Bernoulli verdeeld met parameter $p = \frac{1}{2}$, dus $E(X_i) = \frac{1}{2}$ voor alle i . Vanwege de regels $E(aX + b) = aE(X) + b$ en $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ volgt:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$