

Tentamen Kansrekening I voor Wiskunde

12 januari 2011, 18.30-20.30 uur

Alle onderdelen wegen in principe even zwaar. Motiveer altijd je antwoord.

1. We zetten de getallen $1, 2, \dots, 9$ achter elkaar in een volstrekt willekeurige volgorde, waarbij elke mogelijke volgorde dezelfde kans heeft.
- (a) Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?
 - (b) Wat is de kans dat de 1 gevolgd wordt door de 2?
 - (c) Wat is de kans dat het derde getal de 4 is?
 - (d) Wat is de kans dat er geen twee even getallen naast elkaar staan?

2. Beschouw een groep van 200 personen, waaronder 80 mannen waarvan er 50 roken (en dus 30 niet). Ook zijn er 60 niet-rokende vrouwen.
- (a) Vul de volgende tabel in.

	roken (R)	niet roken (N)	totaal
man (M)			
vrouw (V)			
totaal			200

We kiezen een willekeurige persoon uit de groep, ieder met gelijke kans. De gebeurtenis M is de gebeurtenis dat er een man getrokken wordt, en evenzo voor V , R en N .

- (b) Bereken $P(M|R)$ en $P(R|M)$.

Stel je weet dat één van de personen uit de groep een loterij heeft gewonnen.

- (c) Zonder verdere kennis over de winnaar, hoe groot is de kans dat de winnaar een man is?
- (d) Als je nu hoort dat de winnaar rookt, hoe groot is dan de nieuwe (conditionele) kans dat de winnaar een man is?
- (e) Toon aan dat

$$\frac{P(M|R)}{P(V|R)} = \frac{P(M)}{P(V)} \cdot \frac{P(R|M)}{P(R|V)},$$

niet door getallen in te vullen, maar door de rekenregels van conditionele kansen de gebruiken.

- (f) Controleer de formule in (c) door de getallen uit de tabel in te vullen.

3. Beschouw $\Omega = \{1, 2, 3\}$ en stel dat we uit deze drie getallen er 1 kiezen, met gelijke kansen.

(a) Laat zien dat de gebeurtenis $\{1, 2, 3\}$ onafhankelijk is van zichzelf, en evenzo de gebeurtenis $\emptyset$.

(b) Bepaal alle mogelijke combinaties van gebeurtenissen A en B zodanig dat A en B onafhankelijk zijn van elkaar.

(c) Kan het antwoord op vraag (b) veranderen als we een andere kansmaat kiezen? Motiveer je antwoord.

4. Een echtpaar besluit net zolang kinderen te nemen totdat ze tenminste één jongen en tenminste één meisje hebben. We gaan er van uit dat de kans op een jongen gelijk is aan de kans op een meisje, dat er geen tweelingen geboren worden, en dat het geslacht van verschillende kinderen onafhankelijk is van elkaar. We noemen het aantal kinderen dat dit echtpaar krijgt X .

(a) Bepaal $P(X = 2)$.

(b) Laat zien dat $P(X = k) = 2(\frac{1}{2})^k$, voor $k = 2, 3, \dots$

(c) Bepaal $E(X)$. Je mag hierbij gebruik maken van het feit dat voor $|r| < 1$ geldt dat $\sum_{i=1}^{\infty} ir^i = r/(1-r)^2$.

(d) Laat Y het aantal jongens zijn dat dit echtpaar uiteindelijk krijgt. Bepaal de kansverdeling en verwachting van Y .

5. De stochastische grootte X neemt de waarde 0 aan met kans p en de waarde p met kans $1 - p$, waarbij $p \in [0, 1]$.

(a) Bepaal de verwachting en variantie van X .

(b) Voor welke p is de variantie van X maximaal?