

Tentamen Kansrekening I voor Wiskunde

27 oktober 2010, 15.15-17.15 uur

Alle onderdelen wegen in principe even zwaar. Motiveer altijd je antwoord.

1. Jantje spaart boeken. Hij bezit van een bepaalde titel 4 exemplaren, van een andere titel 3 exemplaren, en van een derde titel 2 exemplaren. De verschillende exemplaren van dezelfde titels zijn niet te onderscheiden. De 9 boeken zet hij nu op een willekeurige volgorde op een boekenplank.

→ (a) Hoeveel mogelijke onderscheidbare volgordes zijn er?

(b) Wat is de kans dat de boeken per onderwerp gegroepeerd staan?

(c) Wat is de kans dat de eerste drie titels allemaal hetzelfde zijn?

Laat X het maximale aantal boeken zijn van dezelfde titel zijn die bij elkaar staan.

→ (d) Bepaal $P(X = 4)$.

Jantje morst limonade over één van de boeken waar hij vier exemplaren van heeft waardoor dit ene exemplaar onderscheidbaar wordt van alle anderen.

→ (e) Hoeveel mogelijke onderscheidbare volgordes zijn er nu?

2. Een student maakt een multiple-choice tentamen waarbij elke vraag vier mogelijke antwoorden heeft. Als de student het antwoord niet weet kiest hij een willekeurig antwoord. De kans dat de student het antwoord op een vraag weet is $3/4$.

(a) Wat is de kans dat de student het antwoord op een goed beantwoorde vraag inderdaad wist?

(b) Wat is de kans dat de student het antwoord op een fout beantwoorde vraag inderdaad niet wist?

(c) Wat is de kans dat de student een goed antwoord geeft?

(d) Als de student 100 vragen beantwoordt, hoe groot is dan de verwachting van het aantal goed beantwoorde vragen?

(e) De examinerator vindt dat iemand 60% van de vragen moet weten om te slagen. Als de student 100 vragen beantwoordt, bij hoeveel goede antwoorden denk je dat deze examinerator een student laat slagen?

→ 3. We gooien 2 maal met een dobbelsteen. Het aantal ogen van de eerste worp noemen we X . Verder definiëren we de stochastische grootte Y als volgt: $Y = 0$ als het totaal aantal ogen van de twee worpen even is, en

$Y = 1$ als het totaal aantal ogen van de twee worpen oneven is. Zijn X en Y onafhankelijk?

4. Een groep van n personen gaat lootjes trekken voor Sinterklaas. In een vaas worden dus n briefjes gestopt, met op elk briefje de naam van één van de deelnemende personen (en natuurlijk komt geen enkele naam twee maal voor). Dan trekt iedereen (zonder teruglegging) een briefje uit de vaas. De stochastische grootte X_i (voor $i = 1, \dots, n$) heeft de waarde 1 als de i -e persoon zichzelf trekt, anders heeft X_i waarde 0. We definiëren tenslotte $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (a) Bepaal de kansmassafunctie van elk van de X_i 's.
- (b) Bereken $E(X_i)$ en gebruik dit om $E(X)$ uit te rekenen.
- (c) Bereken $\text{Var}(X_i)$ voor elke i .

5. De stochastische grootte X heeft een binomiale verdeling met parameters n en p .

- (a) Laat zien dat voor $k = 0, 1, \dots, n-1$ geldt dat

$$P(X = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} P(X = k).$$

- (b) Onderzoek voor welke waarden van k de factor $\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$ groter of kleiner dan 1 is.
- (c) Laat nu zien dat de waarde die X met de grootste kans aanneemt in het interval $[np-1, np+1]$ ligt.