

Hertentamen Kansrekening 1

16 februari 2012, 18:30–20:30

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven. Er zijn in totaal 55 punten te behalen. Als hulpmiddel is een eenvoudige rekenmachine toegestaan.

Geef een duidelijke toelichting bij elk antwoord!

1. Frans heeft 10 paar sokken, dus 20 sokken in totaal. Twee sokken van hetzelfde paar zijn niet van elkaar te onderscheiden, maar geen enkele sok van een paar lijkt op een sok van een ander paar. Na een wasbeurt trekt Frans zijn sokken één voor één uit de wasdroger.

(a) [5 punten] Stel je voor dat we de sokken zouden nummeren van 1 t/m 20, zodat ze allemaal van elkaar te onderscheiden zijn. Hoeveel mogelijke volgordes zijn er dan waarin de sokken getrokken kunnen worden?

(b) [5 punten] In werkelijkheid kan Frans niet alle sokken van elkaar onderscheiden. Hoeveel voor hem onderscheidbare volgordes zijn er waarin de sokken getrokken kunnen worden?

(c) [5 punten] Bereken de kans dat Frans de sokken paar voor paar uit de wasdroger haalt, dus dat de eerste twee sokken een paar vormen, de volgende twee sokken weer een paar vormen, enzovoort.

(d) [5 punten] Laat X het nummer zijn van de trekking waarbij Frans de sok pakt die hoort bij de sok die hij als allereerste trok (Frans moet dus X sokken trekken om het paar dat hoort bij de eerste getrokken sok compleet te hebben). Bereken $E(X)$. Hierbij mag je gebruiken dat

$$\sum_{k=2}^n k = \frac{1}{2}(n-1)(n+2).$$

(e) [5 punten] Laat A_k de gebeurtenis zijn dat Frans na k sokken te hebben getrokken nog geen enkel paar compleet heeft. Toon aan dat

$$P(A_k) = 2^k \frac{(20-k)!}{20!} \frac{10!}{(10-k)!}, \quad k \in \{1, \dots, 10\}.$$

2. Je gooit 10 keer met een gewone, zuivere, dobbelsteen. Laat X het aantal keer zijn dat je een 1 gooit.

(a) [5 punten] Geef de waardenverzameling, kansmassafunctie, verwachting en variantie van X .

(b) [5 punten] Stel dat je 4 Euro krijgt voor elke keer dat je een 1 gooit, maar 2 Euro moet betalen voor elke keer dat je geen 1 gooit. Bereken het verwachte bedrag dat je verliest in Euro, en de variantie van dit bedrag.

(c) [5 punten] Bereken $E(2^X)$.

3. Je gooit n keer met een zuivere munt, waarbij n minstens 2 is. Laat A de gebeurtenis zijn dat je hooguit 1 keer kop gooit, en B de gebeurtenis dat je tenminste 1 keer kop en ook tenminste 1 keer munt gooit.

(a) [5 punten] Toon aan dat

$$P(A) = \frac{n+1}{2^n}, \quad P(B) = \frac{2^n - 2}{2^n}.$$

(b) [5 punten] Bereken $P(A | B)$ en $P(B | A)$.

(c) [5 punten] Laat zien dat A en B alleen onafhankelijk zijn als $n = 3$.