

Hertentamen Kansrekening I voor BWI

11 februari 2010, 18:30–20:30

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Er zijn in totaal 36 punten te behalen (tentamencijfer = $\frac{1}{4}(\text{aantal punten})+1$). Het gebruik van een eenvoudige, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Voorzie elk antwoord van een duidelijke toelichting! Na correctie liggen de gemaakte tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.

1. Michiel heeft een vaas met daarin zes ballen: 2 rode, 2 witte en 2 blauwe. Hij trekt in één greep (zonder terugleggen) 4 willekeurige ballen uit de vaas. Beschouw de volgende gebeurtenissen:

$$A = \{\text{Michiel trekt precies twee rode ballen}\}$$

$$B = \{\text{Michiel trekt evenveel rode ballen als witte ballen}\}$$

$$C = \{\text{Michiel trekt ballen van precies twee kleuren}\}$$

(a) [2 punten] Laat de ballen genummerd zijn van 1 t/m 6. Stel een uitkomstenruimte S op voor dit experiment, zodanig dat alle uitkomsten dezelfde kans hebben, en geef $\#S$.

(b) [3 punten] Laat ballen 1 en 2 de rode ballen zijn. Beschrijf A als deelverzameling van S , bepaal $\#A$ en bereken hiermee $P(A)$.

(c) [5 punten] Onderzoek of B en C onafhankelijk zijn.

2. [5 punten] Een slachtoffer van een tasjesroof ziet in $1/5$ (dus 20%) van de gevallen het gezicht van de dader. Als de vermoedelijke dader gepakt is, wordt hij achter glas tussen n andere personen in een zogenaamde 'line-up' gezet. Een slachtoffer dat het gezicht van de dader heeft gezien zal de dader *zeker* aanwijzen in de line-up, terwijl een slachtoffer dat de dader niet heeft gezien volstrekt willekeurig één van de $n+1$ personen in de line-up zal aanwijzen. Kylie wordt beroofd.

Bereken de conditionele kans dat Kylie het gezicht van de dader heeft gezien, gegeven dat zij de dader aanwijst. Hoe groot moet n zijn zodat deze kans *tenminste* $9/10$ is?

3. De stochast X heeft de waardenverzameling $W_X = \{1, 2, \dots, 10\}$ en kansmassafunctie

$$p_X(k) = A(21 - 2k) \quad k \in W_X.$$

- (a) [3 punten] Bereken A .
- (b) [3 punten] Bereken $E(X)$. Gebruik $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- (c) [4 punten] Bereken de verdelingsfunctie F_X van X .

4. Beschouw een doos met daarin 13 rode kaarten en 24 gele. Vincent trekt net zo vaak *met terugleggen* een kaart uit de doos totdat hij een rode kaart trekt. Laat N het aantal keer zijn dat Vincent een kaart trekt.

- (a) [3 punten] Hoe is N verdeeld en met welke parameter(s)? Geef de waardenverzameling, de kansmassafunctie, de verwachting en de variantie van N .

Zodra Vincent de rode kaart heeft getrokken, pakt hij een lege vaas. In die vaas stopt hij één rode bal, en net zo veel gele ballen als hij gele kaarten heeft getrokken, namelijk $N - 1$. Hierna trekt Mabel één willekeurige bal uit de vaas. Introduceer

$$R = \{\text{Mabel trekt de rode bal uit de vaas}\}$$

- (b) [4 punten] Geef $P(R \mid N = n)$ en toon aan dat $P(R) = -\frac{p}{1-p} \ln(p)$ waarbij $p = 13/37$. Gebruik de bekende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
- (c) [4 punten] Bereken de conditionele kans dat Vincent bij zijn tweede trekking de rode kaart trok, gegeven dat Mabel de rode bal heeft getrokken.