

Herkansing Equationeel Programmeren 8 februari 2011

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Veel succes!

Opgave 1. (3+4+4 punten)

- (a) Teken de term

$$M = (\lambda u. u (\lambda y. z)) (\lambda x. x ((\lambda v. v) (\lambda v. v)))$$

als boom.

- (b) Geef een reductierij van M naar normaalvorm die een overbodige stap bevat. Geef alle stappen van de reductierij expliciet, en geef aan welke stap niet nodig is om de normaalvorm te bereiken.
- (c) Reduceer de term $(\lambda x. x x) (\lambda s. \lambda z. s z)$ stap voor stap naar β -normaalvorm.

Opgave 2. (4+5+4 punten)

- (a) Laat zien dat

$$T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$$

een fixed-point combinator is.

- (b) Reduceer de term $T(\lambda z. w)$ naar normaalvorm. Welke reductiestrategie kun je hier het best gebruiken?
- (c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de leftmost-innermost (call-by-value) strategie niet normalizerend is.

Opgave 3. (5+5 punten)

- (a) We gebruiken de definitie van de Church numerals: $c_n = \lambda s. \lambda z. s^n(z)$. Geef een λ -term S voor successor en laat zien dat $S c_1 \rightarrow_{\beta} c_2$.
- (b) We representeren lijsten met $\text{nil} = \lambda z. \text{true}$ en $\text{cons} = \lambda h t. \lambda z. z h t$. Geef een λ -term voor empty (de functie die een lijst als input neemt en true oplevert precies dan als de lijst leeg is).

Opgave 4. (5 punten)

- (a) Geef een type-afleiding voor de term $\lambda f. f(\lambda x. x)$

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\ \hline \Gamma, x : A \vdash M : B \\ \hline \Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B \\ \hline \Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A \\ \hline \Gamma \vdash (FM) : B \end{array}$$

Opgave 5. (4+4+4 punten)

- (a) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
twice : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a
```

die als input een functie en een element neemt, en als output geeft de functie twee keer toegepast op het element.

- (b) Geef een definitie in OCAML van het datatype `bintree` van binaire bomen met gehele getallen (dus van type `int`) op de bladeren, en geen labels op de knopen.

- (c) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
leftmost : bintree -> int
```

die als input neemt een `bintree` zoals gedefinieerd in (b), en die als output geeft het meest linker label van de `bintree`.

Opgave 6. (5+5+5+5 punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

$S:$	soorten	O	
$\Sigma:$	constanten	$a:$	$\rightarrow O$
		$b:$	$\rightarrow O$
		$c:$	$\rightarrow O$
	functie	$f:$	$O \rightarrow O$
$E:$	vergelijkingen	[1]	$f(a) = c$
		[2]	$f(f(x)) = x$

- (a) Geef een afleiding (met alle stappen expliciet) voor de vergelijking $f(c) = a$.

- (b) Geef een model met een drager bestaande uit drie elementen dat confusion bevat maar geen junk.
- (c) Voeg één of meer vergelijkingen over de signatuur (S, Σ) toe aan de specificatie, zó dat het door jou in (b) gegeven model een initieel model wordt.
- (d) Geef een initieel model voor de (oorspronkelijke) algebraïsche specificatie $((S, \Sigma), E)$.

Opgave 7. (3+6+5+5 punten)

Gegeven is de volgende algebraïsche specificatie:

S :	soorten	O	
Σ :	constanten	a :	$\rightarrow O$
		b :	$\rightarrow O$
		c :	$\rightarrow O$
	functie	f :	$O \rightarrow O$
E :	vergelijkingen	[1]	$f(f(x)) = f(x)$
		[2]	$f(b) = a$

Nu worden vier Σ -algebra's $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ gedefinieerd als volgt:

$\mathcal{R}$:	$O_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}$	$a_{\mathcal{R}} = 1$	$b_{\mathcal{R}} = -1$	$c_{\mathcal{R}} = -2$	$f_{\mathcal{R}}(x) = x $
$\mathcal{L}$:	$O_{\mathcal{L}} = \{-2, -1, 1, 2\}$	$a_{\mathcal{L}} = 1$	$b_{\mathcal{L}} = -1$	$c_{\mathcal{L}} = 2$	$f_{\mathcal{L}}(x) = x $
$\mathcal{M}$:	$O_{\mathcal{M}} = \{-2, -1, 1, 2\}$	$a_{\mathcal{M}} = 1$	$b_{\mathcal{M}} = -1$	$c_{\mathcal{M}} = -2$	$f_{\mathcal{M}}(x) = x $
$\mathcal{N}$:	$O_{\mathcal{N}} = \{0\}$	$a_{\mathcal{N}} = 0$	$b_{\mathcal{N}} = 0$	$c_{\mathcal{N}} = 0$	$f_{\mathcal{N}}(x) = x $

- (a) Geef een afleiding (met alle stappen expliciet) voor de vergelijking $f(f(a)) = f(b)$.
- (b) Geef voor elk van de vier algebra's aan of het modellen zijn voor $((S, \Sigma), E)$ of niet.
(Alleen een eventueel negatief antwoord hoeft je te motiveren.)
- (c) Geef in alle gevonden modellen zo mogelijk een voorbeeld van junk.
- (d) Geef in alle gevonden modellen zo mogelijk een voorbeeld van confusion.

einde van het tentamen