

Tentamen Equationeel Programmeren 15 februari 2010
tevens veegtentamen Inleiding Theoretische Informatica

Dit tentamen bestaat uit 4 pagina's; er zijn 7 opgaven. Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

Opgave 1. (3 + 5 punten)

De term M is gedefinieerd als:

$$M = (\lambda u. u (\lambda y. z)) (\lambda x. x ((\lambda v. v) (\lambda v. v)))$$

- (a) Teken M als boom.
- (b) Geef een reductierij van M naar normaalvorm die een overbodige stap bevat. Geef alle stappen van de reductierij expliciet, en geef aan welke stap niet nodig is om de normaalvorm te bereiken.

Opgave 2. (5 + 5 punten)

Van de twee termen $\lambda x. \lambda y. x y y$ en $\lambda x. \lambda y. x (y y)$ is de ene typeerbaar in simpel getypeerde λ -calculus, en de andere niet. Geef voor de typeerbare term een type-afleiding, en beredeneer voor de andere waarom dat niet mogelijk is.

De typeringsregels zijn:

De typeringsregels van simpel getypeerde λ -calculus:

$$\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash x : A \\[1ex] \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : A \rightarrow B} \\[1ex] \frac{\Gamma \vdash F : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (F M) : B} \end{array}$$

Opgave 3. (2 + 4 + 5 + 5 punten)

- (a) Wat is een fixed-point operator in de λ -calculus?
- (b) Laat zien dat

$$T = (\lambda x. \lambda y. y (x x y)) (\lambda x. \lambda y. y (x x y))$$

een fixed-point combinator is.

- (c) Reduceer de term $T(\lambda z. w)$ naar normaalvorm. Welke reductiestrategie kun je hier het best gebruiken?
- (d) Reduceer nu $T(\lambda z. w)$ met de leftmost-innermost (call-by-value) strategie. Is deze strategie normalizerend?

Opgave 4. (5 + 5 punten)

- (a) We representeren de booleans als $\text{true} = \lambda xy. x$ en $\text{false} = \lambda xy. y$.
Geef een λ -term voor not en laat zien dat deze term het gewenste gedrag vertoont op input true .
- (b) We representeren lijsten met $\text{nil} = \lambda z. \text{true}$ en $\text{cons} = \lambda ht. \lambda z. z \ h \ t$.
Geef een λ -term voor empty (de functie die een lijst als input neemt en true oplevert precies dan als de lijst leeg is).

Opgave 5. (5 + 5 + 4 punten)

- (a) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
range : int -> int -> int list
```

die als input twee integers n en m neemt en als output levert de lijst van integers van n tot en met m . In het geval dat $n > m$ wordt de lege lijst als output gegeven. Een voorbeeld van het gebruik van `range`:

```
# range 3 11 ;;  
- : int list = [3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11]
```

- (b) Geef een definitie in OCAML van de functie

```
kwadraatlijst : int list -> int list
```

die als input een lijst van integers neemt en elementsgewijs kwadrateert. Een voorbeeld van het gebruik van `kwadraat-lijst`:

```
# kwadraatlijst [1 ; 2 ; 3 ] ;;  
- : int list = [1; 4; 9]
```

- (c) Geef een alternatieve definitie van `kwadraatlijst`, gebruikmakend van `map` die in OCAML gedefinieerd wordt door:

```
# let rec map f l =  
  match l with  
  | [] -> []  
  | h :: t -> f(h) :: map f t ;;  
val map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list = <fun>
```

Opgave 6. (5 + 5 + 4 + 4 punten)

Gegeven een signatuur met soort S en functiesymbolen $a \mapsto S$, $b \mapsto S$, en $f : S \rightarrow S$. De bijbehorende equationele specificatie is gegeven door de enkele vergelijking:

$$f(f(x)) = f(f(b))$$

- (a) Geef een afleiding (met alle afleidingsstappen expliciet) voor de vergelijking $f(f(a)) = f(f(f(b)))$.
- (b) Geef een initieel model voor deze equationele specificatie.
- (c) Geef een model voor deze specificatie met een drager die uit drie elementen bestaat. Dit model mag wel confusion bevatten, maar geen junk.
- (d) Voeg een vergelijking (of vergelijkingen) toe aan de specificatie zodat het door jou in (c) gegeven model een initieel model wordt.

Opgave 7. $(2 + 2 + 2 + 4 + 4 \text{ punten})$

Gegeven is een signatuur Σ met één constante c , en één 1-plaatsig functiesymbool f . Verder zijn gegeven de volgende Σ -algebras $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- De drager van $\mathfrak{A}$ is de verzameling met drie elementen $A = \{e, t, d\}$. Verder worden de constante en het functiesymbool geïnterpreteerd door $c_{\mathfrak{A}} = e$ en $f_{\mathfrak{A}}(e) = e$, $f_{\mathfrak{A}}(t) = d$, $f_{\mathfrak{A}}(d) = t$
 - De drager van $\mathfrak{B}$ is de verzameling met drie elementen $B = \{0, 1, 2\}$. Voor de interpretatie hebben we nu $c_{\mathfrak{B}} = 0$ en $f_{\mathfrak{B}}(0) = 1$, $f_{\mathfrak{B}}(1) = 2$, $f_{\mathfrak{B}}(2) = 0$.
- (a) Teken de modellen $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Gebruik daarbij pijltjes voor de interpretatie van f en geef duidelijk aan hoe de constante c wordt geïnterpreteerd.

NB: Bedenk bij de volgende onderdelen dat in een vergelijking, behalve variabelen, alleen de signatuur Σ mag worden gebruikt. Dus wel c en f , maar niet $e, d, t, 0, 1, 2$

- (b) Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{A}$, maar niet in $\mathfrak{B}$.
- (c) Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{B}$, maar niet in $\mathfrak{A}$.
- (d) Geef een initieel correcte specificatie E van $\mathfrak{B}$.
- (e) Geef indien mogelijk ook een initieel correcte specificatie E' van $\mathfrak{A}$. Geef anders een reden waarom het niet mogelijk is.