

Dit tentamen telt voor 30% mee in het eindcijfer voor dit vak.
Dit tentamen duurt 2 uur. Het boek en een rekenmachine zijn niet toegestaan; kladpapier wel.
Geef je antwoorden op dit blad.

Opgave 1 Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = 2 - rx + x^3$$

Hierin is $r \in \mathbb{R}$ een parameter.

- a) [10%] Teken het faseplaatje voor $r < 3$, voor $r = 3$ en voor $r > 3$. Geef ook de stabiliteit van de evenwichtspunten aan.

- b) [15%] Teken het bifurcatie-diagram, d.w.z. een plaatje van het (r, x) -vlak, waarin de evenwichtspunten en hun stabiliteit zijn aangegeven.

- c) [5%] Hoe heet de bifurcatie bij $r = 3$?

Opgave 2 [30%] Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = r + 3ax^2 - 2x^3 .$$

Hierin zijn r en a parameters.

Laat zien dat deze differentiaalvergelijking 1, 2 of 3 evenwichtsoplossingen kan hebben. Bereken de deelverzamelingen van het (r, a) -vlak waarin dit het geval is. Maak ook een tekening van deze deelverzamelingen.

Opgave 3 We bekijken het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- a) [5%] Bereken de eigenwaarden van bovenstaande 2×2 -matrix. Gebruik deze informatie (en niet andere informatie) om de stabiliteit van het evenwichtspunt $(x, y) = (0, 0)$ te bepalen.

- b) [5%] Klassificeer het evenwichtspunt $(0, 0)$. D.w.z. bepaal of dit evenwichtspunt een stabiele knoop, onstabiele knoop, zadelpunt, centrum, stabiele spiraal of onstabiele spiraal is.

- c) [15%] Geef een uitdrukking voor de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

- d) [15%] Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijkingen. D.w.z. teken in het (x, y) -vlak zoveel mogelijk banen van kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.