

Gebruik van een rekenmachine of het boek is niet toegestaan.

Opgave 1 [20%] Laat h en r parameters zijn. Beschouw de 1-dimensionale differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = h + rx^2 - x^3.$$

Teken voor vaste $r < 0$, $r = 0$ en $r > 0$ een bifurcatieplaatje in het (h, x) -vlak. Geef hierin de stabiliteit van de evenwichtspunten aan. Hoe heten de bifurcaties die plaatsvinden als we $r \neq 0$ vasthouden en h variëren?

Bereken de deelverzamelingen van het (h, r) -vlak waarin de differentiaalvergelijking 1, 2 en 3 evenwichtso oplossingen heeft. Maak ook een tekening van deze deelverzamelingen.

Opgave 2 We bekijken het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- [5%] Bereken het spoor en de determinant van bovenstaande 2×2 -matrix. Gebruik deze informatie (en niet andere informatie) om de stabiliteit van het evenwichtspunt $(x, y) = (0, 0)$ te bepalen.
- [5%] Bereken de eigenwaarde(n) van bovenstaande matrix en klassificeer het evenwicht. D.w.z. bepaal of het evenwichtspunt een stabiele knoop, onstabiele knoop, gedegenererde knoop, zadelpunt, centrum, stabiele spiraal of onstabiele spiraal is.
- [5%] Geef een uitdrukking voor de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.
- [5%] Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijkingen. D.w.z. teken in het (x, y) -vlak zoveel mogelijk banen van kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 3 Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen in het vlak

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y^2, \\ \dot{y} &= 2xy. \end{aligned}$$

- [8%] Wat is de index van het evenwichtspunt $(0, 0)$? *Hint: Teken pijltjes op een cirkel rond $(0, 0)$.*
- [7%] Gebruik het resultaat van onderdeel a. om aan te tonen dat de differentiaalvergelijking geen periodieke oplossingen heeft.

Opgave 4 [15%] Bekijk de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} = x^3 - x.$$

Geef de constante van beweging voor deze differentiaalvergelijking. Teken vervolgens het faseplaatje in het $(x, \dot{x})$ -halfvlak. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 5 [15%] Bekijk de differentiaalvergelijking gegeven in poolcoördinaten door

$$\frac{dr}{dt} = 3 - r + \cos 2\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = r - 5 + \sin 4\theta.$$

Bewijs dat deze vergelijking een periodieke oplossing heeft die ligt binnen de ring $1 < r < 5$.

Opgave 6 [15%] Laat $0 < \varepsilon \ll 1$ klein zijn en beschouw de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = 0.$$

Maak een 2-tijdschalen Ansatz van de vorm

$$x(t) = r(\varepsilon t) \cos t + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ voor een functie } r(T) = r(\varepsilon t) \geq 0.$$

Leid af, door termen van orde $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ te onderzoeken, dat

$$\frac{dr}{dT} = ar \text{ voor een constante } a \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van a .

Hint: een analyse van seculiere/resonante termen is in deze opgave niet noodzakelijk.

SUCCES!