

Vraag 1: 20 %; Vraag 2: 15 %; Vraag 3: 15 %; Vraag 4: 15 %; Vraag 5: 15 %; Vraag 6: 20 % .
Het cijfer voor dit tentamen telt voor 50% mee in het eindcijfer voor dit vak.

Opgave 1 Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen in het vlak

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} &= y(2 - x - y).\end{aligned}$$

- Bereken de evenwichtoplossingen en lineariseer en classificeer deze.
- Bereken de index van alle evenwichtspunten.
- Gebruik het resultaat van onderdeel b. om aan te tonen dat dit stelsel differentiaalvergelijkingen geen periodieke oplossingen heeft.

Opgave 2 Laat $\mu \gg 1$ een grote parameter zijn. Beschouw het “slow-fast” systeem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(y - F(x)) \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\mu}x\end{aligned} \quad \text{waarin } F(x) = \begin{cases} 5(x+2)^2 - 2 & \text{for } x < -1 \\ (x-1)^2 - 1 & \text{for } x \geq -1 \end{cases}.$$

Teken de isoklijnen. Schets de oplossingen die starten in $(-2, -2)$, $(-2, 0)$ en $(-3, 3)$.

Opgave 3 Bekijk de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \text{ gedefinieerd voor } x > 0.$$

Teken het faseplaatje van deze vergelijking in het $(x, \dot{x})$ -halfvlak. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 4 We bekijken de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y f(x^2, y) \\ \dot{y} &= x g(x^2, y).\end{aligned}$$

Laat zien dat deze vergelijkingen reversibel zijn. D.w.z. dat als $(x(t), y(t))$ een oplossing is, dan is ook $(X(t), Y(t)) := (-x(-t), y(-t))$ een oplossing.

Opgave 5 Bekijk de differentiaalvergelijking gegeven in poolcoördinaten door

$$\frac{dr}{dt} = 3 - r + \cos 2\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = r - 1 + \sin 2\theta.$$

Bewijs dat deze vergelijking een periodieke oplossing heeft die ligt binnen de “disk min een punt” $0 < r < 5$.

Opgave 6 Laat $0 < \varepsilon \ll 1$ klein zijn en beschouw de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 + \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

Maak een 2-tijdschalen Ansatz van de vorm

$$x(t) = r(\varepsilon t) \cos(t + \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ voor een variabele } r(T) = r(\varepsilon t) \geq 0 \text{ en constante } \phi.$$

Leid af, door termen van orde $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ te onderzoeken, dat

$$\frac{dr}{dT} = ar^3 \text{ voor een constante } a \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van a . Is die positief of negatief? Wat betekent dit? Schets de oplossingen die de Ansatz voorspelt in het $(x, \dot{x})$ -vlak.

Hint: een analyse van seculiere/resonante termen is in deze opgave niet noodzakelijk.

SUCCES!