

Dit hertentamen bepaalt voor 100% het eindcijfer van dit vak.

Opgave 1 [30%] We bekijken het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Bereken het spoor en de determinant van bovenstaande 2×2 -matrix. Gebruik deze informatie (en niet andere informatie) om het evenwichtspunt $(x, y) = (0, 0)$ te klassificeren. D.w.z. bepaal of het evenwichtspunt een stabiele knoop, onstabiele knoop, gedegenereerde knoop, zadelpunt, centrumpunt, stabiele spiraal of onstabiele spiraal is.
- Bereken de eigenwaarde(n) en eigenvectoren van bovenstaande matrix en geef een uitdrukking voor de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen.
- Teken het faseplaatje van de differentiaalvergelijkingen. D.w.z. teken in het (x, y) -vlak zoveel mogelijk banen van kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.

Opgave 2 [30%] Laat h en r parameters zijn en beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = h + rx^2 + x^4.$$

Laat zien dat deze differentiaalvergelijking 0, 1, 2, 3 of 4 evenwichtsooplossingen kan hebben. Bereken de deelverzamelingen van het (h, r) -vlak waarin dit het geval is. Maak ook een tekening van deze deelverzamelingen. Geef tenslotte van alle gevonden evenwichtsooplossingen aan of ze stabiel of onstabiel zijn.

Opgave 3 [15%] Bekijk de differentiaalvergelijking gegeven in poolcoördinaten door

$$\frac{dr}{dt} = 3 - r + \cos 7\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = r - 1 + \sin 7\theta.$$

Bewijs dat deze vergelijking een periodieke oplossing heeft die ligt binnen de “disk min een punt” $0 < r < 5$.

Opgave 4 [15%] Teken in het $(x, \dot{x})$ -vlak het faseplaatje van de conservatieve differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \text{ voor } x > 0.$$

Hint: bepaal een geschikte potentiaal.

Opgave 5 [10%] Veronderstel dat een 2-dimensionale niet-lineaire differentiaalvergelijking N knooppunten, S zadelpunten, F spiraalpunten en daarnaast geen andere evenwichtsooplossingen heeft. Bewijs dat

$$N + F = 1 + S.$$