

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen
	Duur: $2\frac{3}{4}$ uur
Vrije Universiteit	29-05-2009

1. Geef een voorbeeld van een gewone differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

waarvan de oplossing bestaat, maar niet uniek is en geef de oplossingen expliciet.

2. Beschouw de vergelijking

$$\dot{x} = \beta x + \frac{x^3}{1+x^2}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Schets voor verschillende waarden van β het faseportret. Wat is het bifurcatie diagram?

3. Geef de klassifikatie van lineaire tijdsonafhankelijke vektorvelden in $\mathbb{R}^2$, d.w.z. vergelijkingen van de vorm

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

in termen van spoor en determinant van A (het τ, Δ -plaatje). Behandel ook de grensgevallen (spoor, determinant of discriminant nul) nauwkeurig.

4. Geef de definitie van een Lyapounov functie en formuleer de stelling van Lyapounov. Laat zien wat dit resultaat zegt over de stabiliteit van het evenwichtspunt $(\phi, \dot{\phi}) = (0, 0)$ van de vergelijking

$$\ddot{\phi} + \alpha \dot{\phi} + \sin \phi = \beta, \quad \alpha, \beta > 0,$$

waarbij de energie van het systeem met $\alpha = \beta = 0$ als Lyapounov functie wordt genomen.

5. Beschouw de vergelijking (in pool-coördinaten)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{2}(kr + F \sin(\phi)) \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{8}(4a - 3br^2 + \frac{4F}{r} \cos(\phi)), \end{aligned}$$

waarin $a, b, F, k \in \mathbb{R}$ en strikt positief (> 0).

- a) Bepaal de evenwichtspunten (afhankelijk van de parameters).
b) Kan er een periodieke oplossing zijn? (Hint: Dulac).

Normering:

1 : 15 2 : 20 3 : 20 4 : 20 5 : 15

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$