

Normering:

			$4a : 3$		
		$3a : 5$	$4b : 3$		
$1 : 15$	$2 : 15$	$3b : 5$	$4c : 3$	$5 : 15$	$6 : 15$
		$3c : 5$	$4d : 3$		
			$4e : 3$		

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10} + 1$$

1. Beschouw de vergelijking

$$\dot{x} = 5 - re^{-x^2}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Vind de waarden van r waar een bifurcatie plaatsvindt en klassificeer de bifurcatie als *saddle-node*, *transcritical*, *supercritical pitchfork*, of *subcritical pitchfork*. Wat is het bifurcatie diagram?

2. Beschouw de vergelijking op de cirkel

$$\dot{\phi} = \omega - \sin(\phi), \quad \omega > 1.$$

Bereken de formule voor de periode T .

3. Beschouw de vergelijking (gegeven in poolcoördinaten r en θ)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\log(r)} \end{aligned}$$

- Vind analytische uitdrukkingen voor $r(t)$ en $\theta(t)$, gegeven een beginvoorwaarde (r_0, θ_0) met $0 < r_0 < 1$.
- Laat zien dat $r(t) \rightarrow 0$ and $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$. Concludeer dat de oorsprong een stabiel spiraalpunt is.
- Laat zien dat de oorsprong een stabiel punt is van het gelineariseerde systeem.
Hint: schrijf het systeem in cartesische coördinaten $x = r \cos(\theta)$ en $y = r \sin(\theta)$ en lineariseer rond de oorsprong.

4. Beschouw de vergelijking

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= -4x\end{aligned}$$

- a) Schets het fase diagram van dit systeem.
- b) Laat zien dat de functie $E = 4x^2 - y^2$ konstant is langs de banen van het systeem.
- c) De oorsprong is een zadelpunt van dit systeem. Vind vergelijkingen voor de stabiele and instabiele varieteiten.
- d) Het systeem kan ontkoppeld worden door nieuwe variabelen in te voeren:

$$u = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}, \quad v = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}.$$

Herschrijf de dynamica van het originele systeem in deze nieuwe variabelen.

- e) Wat zijn de vergelijkingen voor de stabiele en instabiele varieteiten in termen van de dynamica van u en v ?
5. Formuleer en bewijs het criterium van Dulac.
6. Formuleer de Liénard's stelling en laat zien dat de van der Pol oscillator

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0,$$

een unieke, stabiele *limit cycle* heeft.