

Veeg Tentamen Discrete Optimalisering, 25-03-2014
REKENMACHINE IS NIET TOEGESTAAN

Puntentoekening

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven, waaruit in totaal 50 punten te behalen zijn.

<i>Opgave</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Opg. 1	5	10	5
Opg. 2	10	5	-
Opg. 3	10	5	-

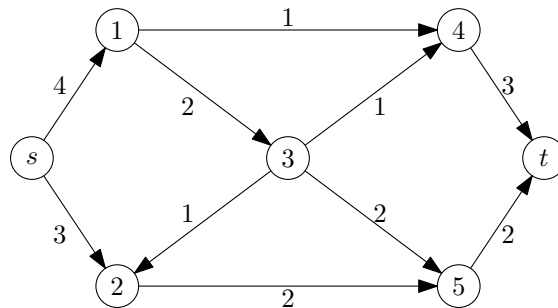
Tentamencijfer

totale aantal punten

5

Opgave 1.

Beschouw het netwerk in de figuur. Het nummer bij een pijl geeft de capaciteit van de pijl aan. We gaan met behulp van Ford-Fulkerson de maximum stroom in dit netwerk van knoop s naar knoop t berekenen.



In de eerste twee iteraties van Ford-Fulkerson zijn de volgende stroom vermeerderende paden gevonden:

- $s, 1, 4, t$ met bottleneck capaciteit 1 vanwege pijl $(1, 4)$;
- $s, 1, 3, 5, t$ met bottleneck capaciteit 2 vanwege pijlen $(1, 3)$, $(3, 5)$ en $(5, t)$.

Dus, we hebben nu een stroom van 3 vanuit s naar t . Bereken voor ieder van de kanten hoeveel stroom er nu doorheen gaat. Zoals je na kunt gaan is er geen stroom vermeerderende pad wat alleen gebruik maakt van voorwaartse pijlen.

- (a) Geef de stroom door het netwerk na deze twee iteraties.

- (b) Zet de zoektocht naar stroomvermeerderende paden voort, ofwel door het formuleren van het residuele netwerk behorend bij de stroom berekend in **(a)**, ofwel door gebruik te maken van de labeling methode uit het boek, maar in beide gevallen uitgaand van de stroom die we bij **(a)** al door het netwerk gestuurd hebben. (Dus niet vanaf stroom 0 beginnen!) Doe dit tot er geen stroomvermeerderende paden meer bestaan en geconcludeerd kan worden dat de optimale oplossing gevonden is. (*Hint1: Gebruik gerust de figuur om de informatie en het residule netwerk in weer te geven. Hint2: Als je het goed doet ben je al na 1 iteratie klaar*).
- (c) Check correctheid van je antwoord door de bijbehorende minimum s - t -snede te vinden en zijn grootte te bepalen. Geef goed aan hoe je aan de snede komt.

Opgave 2.

- (a) Vat de getallen uit de figuur van **Opgave 1** op als lengtes van de corresponderende pijlen. Vind dan het kortste pad van s naar t . Laat goed zien hoe je Dijkstra's algoritme hiervoor gebruikt.
- (b) Laat de richtingen op alle pijlen uit de figuur van **Opgave 1** weg en vat de getallen op als kosten van de corresponderende kanten. Vind dan de minimum opspannende boom in de graaf. Laat goed zien hoe je Prim's algoritme of Kruskal's algoritme hiervoor gebruikt.

Opgave 3.

Een groep N huisartsen heeft besloten om samen te gaan werken. Echter willen ze dat iedere patient één van de artsen als eerste aanspreekpunt krijgt toegewezen. Ze willen de gehele verzameling van M patienten herverdelen. Voor iedere patient i is op grond van het verleden een geschatte hoeveelheid werk T_i vastgesteld, uitgedrukt in benodigde tijd per jaar, waarbij T_i afgerond is op halve uren. Daarnaast is bij de verdeling de afstand van de patienten naar de huisartsen praktijk van belang: de afstand tussen de praktijk van huisarts j en het adres van patient i is d_{ij} [$i = 1, 2, \dots, M; j = 1, \dots, N$]. Huisarts j wil in zijn praktijk een verzameling patienten die hooguit bij elkaar een geschatte hoeveelheid werk van t_j uur per jaar vragen, [$j = 1, \dots, N$]. De huisartsen willen de patienten zodanig verdelen dat de som van de afstanden die de patienten naar de aan hen toegewezen huisarts moeten afleggen minimaal is.

- (a) Formuleer dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. **Hint:** Begin met stadium j .

Nadat de huisartsen de optimale toewijzing hebben kunnen aanschouwen blijkt dat door het minimaliseren van de som van de afstanden, er een enkele patient is die een enorme afstand tot zijn toegewezen huisarts moet afleggen. Om dit te voorkomen stellen ze voor om te eisen dat geen enkele patient meer dan een afstand D zou mogen reizen naar de hem toegewezen huisarts. Om dat mogelijk te maken zetten de huisartsen de harde restrictie van t_j werk per jaar om in een em wens. Ze zoeken nu een zodanige verdeling van de patienten dat de geschatte hoeveelheid werk die enige arts te doen krijgt bovenop zijn maximaal gewenste hoeveelheid geminimaliseerd wordt.

- (b) Formuleer ook dit probleem als een dynamisch programmeringsprobleem. Beschrijf daarvoor in ieder geval de toestand, de interpretatie van de waardefunctie in woorden, de recursierelatie, de start-recursie en wat je moet berekenen in termen van de waardefunctie. ***Hint:*** *Begin met stadium j .*