

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Differentiaalvergelijkingen
Afdeling Wiskunde	voor MNW
Vrije Universiteit	29-5-2015, zaal KC137 12.00–14.45 uur

Gebruik van rekenmachine, boek of eigen aantekeningen is niet toegestaan. Motiveer je antwoorden. De te behalen punten staan per som vermeld.

1. [20%] Geef de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Teken ook het faseplaatje van deze differentiaalvergelijkingen, d.w.z. een plaatje van het (x, y) -vlak met daarin een aantal kwalitatief verschillende oplossingen. Vergeet de pijltjes niet.

2. [20%] Los op met behulp van de Laplace-transformatie:

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 10$$

met beginvoorwaarden $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. *Hint:* $s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 4$.

3. [20%] Probeer een oplossing te vinden van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ van de vergelijking

$$(1 + x)y'(x) + 3y(x) = x$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 2$. Geef de recurrente relatie tussen de coëfficiënten c_n . Bereken de convergentiestraal van de gevonden machtreeksoplossing.

4. [20%] Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = x(1 - x - y) \\ y'(t) = y(2 - x - y) \end{cases}$$

Bereken de stationaire punten en bereken de linearisatiematrix ("Jacobi-matrix") van deze punten. Welke van de gevonden stationaire punten zijn asymptotisch stabiel?

5. De 2π -periodieke functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ voor } -\pi < x \leq \pi.$$

- (a) [5%] Schets de grafiek van f . Bepaal voor welke waarden van x de Fourierreeks van f convergeert naar $f(x)$.

- (b) [10%] Bereken de Fourier(sinus)reeks van f , d.w.z. bepaal coëfficiënten $b_1, b_2, \dots$ zodat

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

Je mag hierbij gebruiken dat $\int x \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{1}{n} x \cos nx$.

- (c) [5%] Bewijs nu, door $f(\frac{\pi}{2})$ op twee manier te berekenen, dat

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{oneven}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Formuleblad Differentiaalvergelijkingen voor MNW

Tabel van enkele Laplace-getransformeerden:

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} \, dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$