
Hertentamen
Complexe Analyse

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Maandag 6 juni, 15:15 - 18:00

Instructies: 6 opgaven; *motiveer alle antwoorden.*

Geen rekenmachines of boeken.

Normering: 1(10 ptn), 2(10 ptn), 3(10 ptn), 4(20 ptn), 5(20 ptn), 6(20 ptn).

Cijfer deeltentamen = ptn/10 + 1.

1. Gegeven de simpel gesloten contour $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ en de functie $f(z) = z^5 + 3z^3 + 7$. Toon aan dat het aantal nulpunten (gerekend met multipliciteit) van f binnen de contour C gelijk is aan 5.

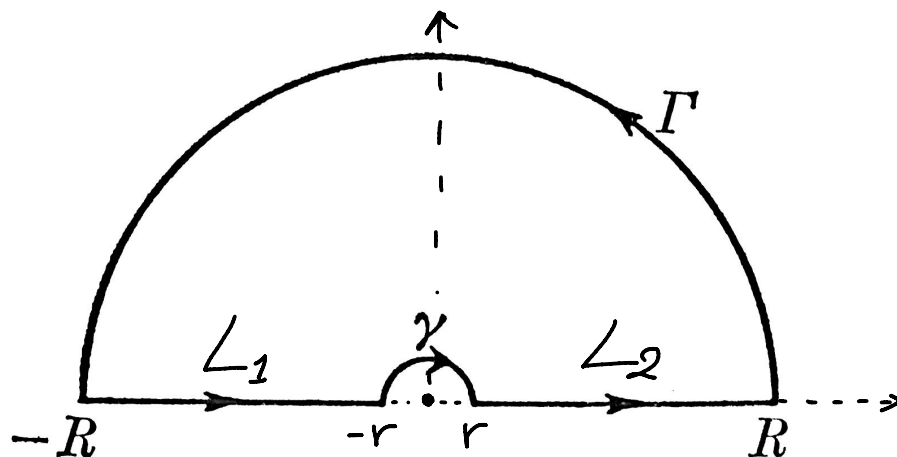
2. Check analyticiteit van de volgende functies

(a) $f(z) = z \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$;

(b) $f(z) = g(z)h(z)$, g analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en h analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{i\}$;

(c) $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$, $z \neq \pm 1$.

3. Gegeven de positieve simpel gesloten contour $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ en de functie $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Bereken het omwindingsgetal $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$.



Figuur 1: De contour C .

4. Gegeven de contour C in bovenstaande figuur en de functie $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$.

(a) Bereken

$$\oint_C \frac{1-e^{2iz}}{z^2} dz.$$

(b) Bewijs dat

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \rightarrow 0, \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

(c) Bewijs dat (γ met negatieve orientatie)

$$\int_{\gamma} f(z) dz \rightarrow -2\pi, \quad \text{als } r \rightarrow 0.$$

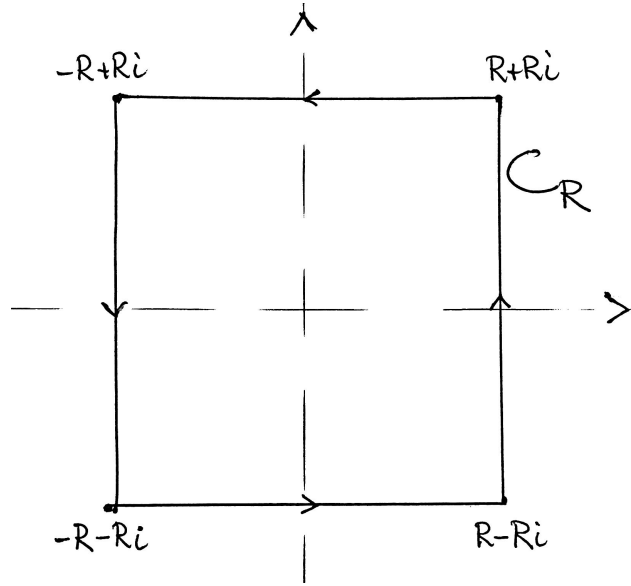
(d) Gebruik de onderdelen (a)-(c) om aan te tonen dat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Gegeven de functie

$$f(z) = e^{1/z^2}.$$

Bereken de Laurent reeks van f in de annulus $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$.



Figuur 2: De contour C .

6. Gegeven de contour C_R in bovenstaande figuur en de functie $f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z^4+4}$ met $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.

(a) Kies $R_n = n + \frac{1}{2}$ en laat zien dat voor $n \geq 2$ geldt dat:

$$\left| \frac{\cot(\pi z)}{z^4 + 4} \right| \leq \frac{2}{R_n^4 - 4},$$

voor $z \in C_{R_n}$.¹

¹Hint: $\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$ en $\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$.

(b) Gebruik (a) om te bewijzen dat:

$$\left| \oint_{C_{R_n}} \frac{\cot(\pi z)}{z^4 + 4} dz \right| \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(c) Bereken de polen en residuen van de functie $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^4 + 4}$ in C_{R_n} .

(d) Gebruik onderdelen (a)-(c) om de volgende gelijkheid te bepalen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4 + 4} = \frac{1}{8} \left(1 + \pi \coth(\pi) \right).$$

Succes