
Deeltentamen 2
Complexe Analyse

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Woensdag 27 mei, 12:00 - 14:45

Instructies: 5 opgaven; *motiveer alle antwoorden.*

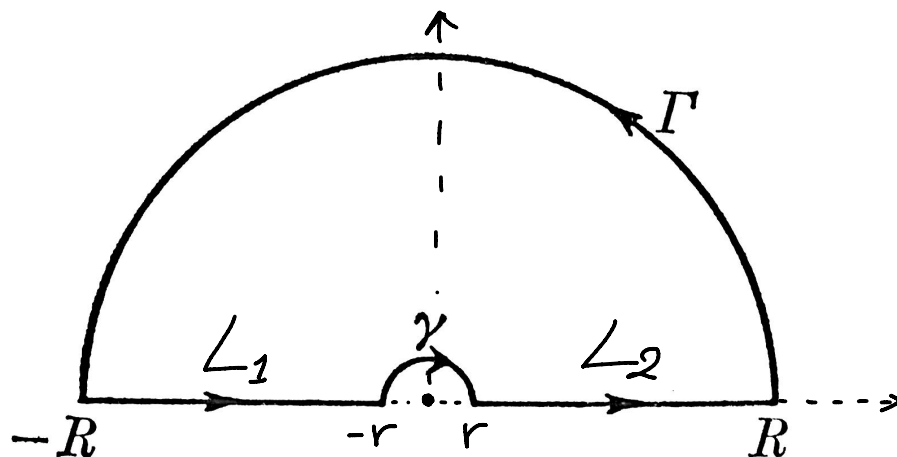
Geen rekenmachines of boeken.

Normering: 1(10 ptn), 2(10 ptn), 3(25 ptn), 4(20 ptn), 5(25 ptn).

Cijfer deeltentamen = ptn/10 + 1.

1. Gegeven de simpel gesloten contour $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ en de functie $f(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$. Bepaal het aantal nulpunten (gerekend met multipliciteit) van f binnen de contour C .

2. Gegeven de positieve simpel gesloten contour $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ en de functie $f(z) = \frac{z}{z^4+4}$. Bereken het omwindingsgetal $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$.



Figuur 1: De contour C .

3. Gegeven de contour C in bovenstaande figuur en de functie $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$.

(a) Bereken

$$\oint_C \frac{1-e^{2iz}}{z^2} dz.$$

(b) Bewijs dat

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \rightarrow 0, \quad \text{als } R \rightarrow \infty.$$

(c) Bewijs dat (γ met negatieve orientatie)

$$\int_{\gamma} f(z) dz \rightarrow -2\pi, \quad \text{als } r \rightarrow 0.$$

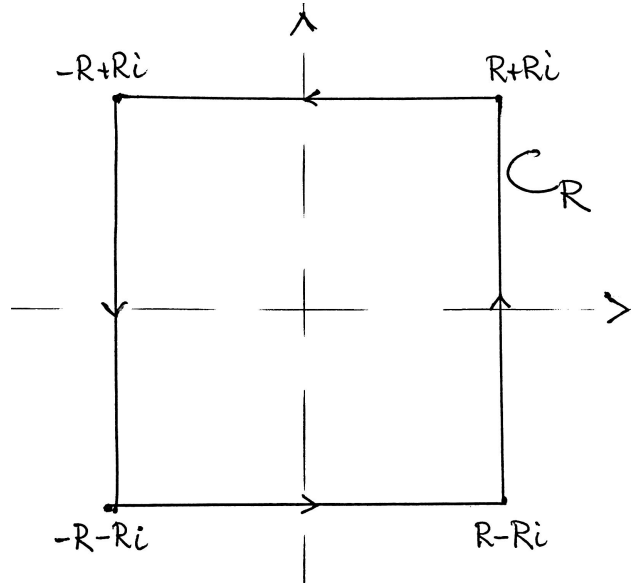
(d) Gebruik de onderdelen (a)-(c) om aan te tonen dat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Gegeven de functie

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

Bereken de Laurent reeks in de annulus $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.



Figuur 2: De contour C .

5. Gegeven de contour C_R in bovenstaande figuur en de functie $f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z^2}$ met $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.

(a) Kies $R_n = n + \frac{1}{2}$ en laat zien dat voor $n \geq 2$ geldt dat:

$$\left| \frac{\cot(\pi z)}{z^2} \right| \leq \frac{2}{R_n^2},$$

voor $z \in C_{R_n}$.¹

¹Hint: $\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$ en $\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$.

(b) Gebruik (a) om te bewijzen dat:

$$\left| \oint_{C_{R_n}} \frac{\cot(\pi z)}{z^2} dz \right| \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(c) Bereken de polen en residuen van de functie $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$ binnen de contour C_{R_n} .

(d) Gebruik onderdelen (a)-(c) om de volgende gelijkheid te bepalen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Succes