
Deeltentamen 1
Complexe Analyse

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Woensdag 25 maart, 12:00 - 14:45

Instructies: 6 opgaven; *motiveer alle antwoorden.*

Geen rekenmachines of boeken.

Normering: 1(10 ptn), 2(10 ptn), 3(10 ptn), 4(10 ptn), 5(10 ptn), 6(10 ptn), 7(30 ptn).

Cijfer deeltentamen = ptn/10 + 1.

1. Check analyticiteit van de volgende functies

(a) $f(z) = z - \bar{z}$,

(b) $f(z) = x^2 + iy^2$ ($z = x + iy$),

(c) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \neq \pm i$.

2. Druk uit als complex getal(len) $z = x + iy$:

(a) $z = i^i$,

(b) $z = \operatorname{Log}(i)$,

(c) $z = \tan(\pi(1 + i))$,

(d) $z = \sqrt{2 - i}$.

3. Geven de analytische functie $f = u + iv: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ op een domain D . Laat zien dat de functies

$$U(x, y) = e^{u(x, y)} \cos v(x, y), \quad \text{en} \quad V(x, y) = e^{u(x, y)} \sin v(x, y),$$

beiden harmonisch op D .

4. Los op in $\mathbb{C}$: $e^z = -3$.

5. Bewijs dat

$$\oint_{|z|=1} \operatorname{Log}(z+2) dz = 0.$$

6. Bereken

$$\oint_{|z|=2} \frac{2e^{-z}}{2z - \pi i} dz.$$

7. Gegeven de functie

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 4},$$

en de contouren

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq R, \operatorname{Im}(z) = 0\};$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$

met $R > \sqrt{2}$.

(a) Bepaal de punten waar f niet gedefinieerd is en geef aan waar f analytisch is.

(b) Gebruik de integraal formule van Cauchy om de volgende integralen uit te rekenen:

$$\oint_{|z-1-i|=1} f(z) dz, \quad \oint_{|z+1-i|=1} f(z) dz.$$

(c) Kies een parametrisatie voor γ_2 en bewijs dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

(d) Definieer de simpel gesloten contour $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ met positive orientatie en bereken:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz.$$

(e) Bereken (mbv (a)-(d)):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{x^4 + 4} dx.$$

Succes