

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe-Functietheorie (X_400389)
Afdeling Wiskunde	13-02-2014
Vrije Universiteit	18:30-21:15 uur

Gebruik van rekenmachine, formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan

1. We bekijken de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

- a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
- b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f analytisch is op $\mathbb{C}$.

2. De functie $f : \mathbb{C} \setminus \{2, 4\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$.

- a) Bepaal de reeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $2 < |z| < 4$.
[Aanwijzing: gebruik breuksplitsing.]
- b) Laat C de cirkel $|z| = 3$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

3. Gegeven is voor $z \neq 0$ de complexe functie $f(z) = \frac{1 - e^{z^2}}{z^2}$ en de contour $C : |z| = 1$, die in positieve zin wordt doorlopen.

- a) Toon aan dat $z = 0$ een ophefbare singulariteit is.
- b) Bereken $\int_C f(z) dz$.

4. Laat C de eenheidscirkel $|z| = 1$ zijn die in positieve zin wordt doorlopen.

Gegeven is de functie $f(z) = \frac{3z^4 + 1}{z^2}$. Bepaal het windingsgetal $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$.

Z.O.Z.

5. Gegeven zijn de meerwaardige complexe functie

$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{z^2 + 1}, \text{ met } |z| > 0 \text{ en } -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2},$$

en voor $R > 1 > \epsilon > 0$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \\ \gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq -\epsilon, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en γ_4 en laat met afschattingen zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0.$$

b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ en laat γ linksom worden doorlopen.

Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.

c) Leid uit onderdelen a) en b) af dat

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^3}{8} \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0.$$

[Aanwijzing: je kunt gebruik maken van het feit dat $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$.]

6. Bekijk de transformatie $w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

a) Voor welke waarde(n) van z is deze transformatie niet conform?

b) Toon aan dat de cirkel met middelpunt -1 en straal 1 (in het z -vlak) door deze transformatie wordt afgebeeld op de cirkel met middelpunt $-\frac{1}{3}$ en straal $\frac{2}{3}$ (in het w -vlak).

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 4	3 : a) 4	4 : 3	5 : a) 5	6 : a) 1
b) 2	b) 2	b) 1		b) 2	b) 5
				c) 4	
—	—	—	—	—	—
5	6	5	3	11	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$