

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe Functietheorie (deel 2/geheel)
Afdeling Wiskunde	20-02-2012
Vrije Universiteit	18.30-21.15

Dit tentamen bevat 6 sommen. Je maakt er 3 of 4. De laatste twee sommen zijn zonder spoorboekje. Als je alleen deel 2 doet dan maak je 3 sommen:

- 1 of 2 (3 punten)
- 3 of 4 (4 punten)
- 5 of 6 (3 punten)

Cijfer is dan het totaal gescoorde aantal punten. Doe je het hele tentamen maak dan 1 som naar keuze extra. Je komt dan op totaal 13 of 14 punten. Ik deel door 12 om het cijfer te krijgen.

Schrijf na afloop op het tentamen of je deel 2 of het hele tentamen doet.

Denk even na over welke sommen je eerst maakt.

Licht je antwoorden duidelijk toe.

Bij de correctie wordt op de details van de afschattingen gelet, ook bij som 5.

OPGAVE 1. Een Möbius-transformatie is een afbeelding van $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ naar $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ van de vorm

$$f : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = w,$$

met $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ en $ad - bc \neq 0$. Möbius-transformaties zijn conforme (i.e. hoekbewarende) afbeeldingen die cirkels op cirkels afbeelden. In deze opgave verstaan we onder cirkels ook lijnen door ∞ .

Voor $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ is f_α een Möbius-transformatie die $z = 0$ op $w = 1$ en $z = \infty$ op $w = -1$ afbeeldt, met afgeleide in 0 gelijk aan α . De lineaire benadering van $f_\alpha(z)$ rond $z = 0$ is dus gegeven door $1 + \alpha z$ en $f_\alpha(\infty) = -1$.

De volgende onderdelen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt. Houd het rekenwerk minimaal en licht de antwoorden duidelijk toe.

- a) Leg uit waarom f_α uniek bepaald is door α , bijvoorbeeld door een formule voor $f_\alpha(z)$ te geven.
- b) Laat $\phi \in \mathbb{R}$. In het z -vlak is l_ϕ de lijn door $z = 0$ en $z = e^{i\phi}$. Geef een parameter-voorstelling van de raaklijn in $w = 1$ aan het beeld van l_ϕ onder f_α .
- c) Bepaal alle waarden van α waarvoor het beeld van de reële as (in het z -vlak) onder f_α de reële as (in het w -vlak) is en maak voor één van deze waarden een schets van het w -vlak waarin je aangeeft wat de beelden zijn van de 4 kwadranten in het z -vlak.

OPGAVE 2. Voor $R > 0$ laat $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Voor $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continu met $f(0) = f(2\pi)$ definiëren we $F : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{e^{i\phi} - z} d\phi.$$

a) Laat voor $z, a \in D_1$ met $z \neq a$ zien dat

$$\frac{\frac{1}{e^{i\phi} - z} - \frac{1}{e^{i\phi} - a}}{z - a} - \frac{1}{(e^{i\phi} - a)^2} = K(z, \phi, a)(z - a),$$

en geef een formule voor $K(z, \phi, a)$.

b) Laat zien dat er een van R afhankelijke constante C_R is zo dat $|K(z, s, a)| \leq C_R$ als $R < 1$ en $z, a \in D_R$.

c) Bewijs dat F complex differentieerbaar is in elke $a \in D_1$. Schrijf daartoe het verschil van het differentiequotient en de te verwachten afgeleide $A = F'(a)$ als

$$\frac{F(z) - F(a)}{z - a} - A = (z - a) \int_{-\infty}^{\infty} K(z, \phi, a) f(\phi) d\phi$$

en schat af.

OPGAVE 3. Voor $z \in \mathbb{C}$ niet op de negatieve imaginaire as kiezen we

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

en definiëren we

$$f_{ab}(z) = \frac{\log z}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)},$$

waarbij $a > b > 0$. Laat $0 < \rho < b < a < R$. De linksom doorlopen contour γ bestaat uit 4 stukken, namelijk de twee intervallen $(-R, -\rho)$ en (ρ, R) op de reële as, en de halve cirkelbogen

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad \text{en} \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

- Laat met een afschatting zien dat de integraal van $f_{ab}(z)$ over de halve cirkelboog met straal ρ naar 0 gaat als $\rho \rightarrow 0$.
- Laat met een afschatting zien dat de integraal van $f_{ab}(z)$ over de halve cirkelboog met straal R naar 0 gaat als $R \rightarrow \infty$.
- Bepaal de residuen van f_{ab} in $z = ai$ en $z = bi$ en bereken $\oint_{\gamma} f_{ab}(z) dz$ met behulp van de residustelling.
- Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

OPGAVE 4. Schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. De absolute waarde van de complexe sinusfunctie is gelijk aan

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \quad \left(\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right).$$

Gegeven is de functie f met formulevoorschrift

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin \pi z}.$$

- Bepaal de Laurentreeks f rond $z = 0$ tot en met de constante term.
- Bepaal de residuen van f in alle andere singulariteiten van f .
- Laat γ_n de rand zijn van het vierkant

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq n + \frac{1}{2}, |y| \leq n + \frac{1}{2}\},$$

linksom doorlopen. Laat met afschattingen voor de bijdragen over de zijden zien dat $\oint_{\gamma_n} f(z) dz \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Behandel daartoe de bijdragen aan de integraal van de bovenzijde en van de rechterzijde in detail. De bijdragen van de andere twee zijden gaan hetzelfde.

- Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

OPGAVE 5. De Fouriergetransformeerde van een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wordt gedefinieerd door

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\lambda x} dx$$

Bepaal met behulp van contourintegratie en de residustelling $\hat{f}(\lambda)$ als $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Hint: doe eerst $\lambda > 0$.

OPGAVE 6. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{a + 2 \cos \phi} d\phi$$

voor $a > 2$ met behulp van de transformatie $z = e^{i\phi}$ en de residustelling.

