

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe functies/Complexe Functietheorie Deel 1
Afdeling Wiskunde	19-1-2012
Vrije Universiteit	18.30-20.30 uur

Alle studenten maken opgaven 1, 2 en 3. Licht je antwoorden toe.
 Normering: $\frac{3}{2}$ punt per onderdeel. 7 onderdelen.
 Cijfer minimaal 1, maximaal 10.

1. We bekijken de functie f gegeven door $f(z) = \frac{1}{z}$.

- Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
- Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f (complex) differentieerbaar is in elke $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq 0$.
- Bepaal $f'(z)$ in termen van x en y en in termen van z .

2. Laat $0 < a < 1 < b$. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$.

- Geef de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 0$.
- Laat C de kromme zijn geparametriseerd door $z(t) = e^{it}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Bereken $\oint_C f(z) dz$.

3. Laat $0 < a < b < c$. Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)}$.

- Bereken het residu van $f(z)$ in $z = ai$.
- Bereken met behulp van de residustelling

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx.$$