

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe Functietheorie
Afdeling Wiskunde	10-2-2010
Vrije Universiteit	18.30-21.15

Normering: 1 punt voor 1, 2 punten voor 2 en voor 3, 3 punten voor 4 en voor 5. Cijfer is het totaal, maar minimaal 1 en maximaal 10. .

1. We bekijken de functie f gegeven door $f(z) = \cos z$. Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$ en schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies. Gebruik de vergelijkingen van Cauchy-Riemann om aan te tonen dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$.
2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$.
 - a) Wat is de convergentiestraal van de machtreeksontwikkeling van f rond $z = 0$?
 - b) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van $\frac{1}{z}$ voor $|z|$ groot.
3. Laat $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$. Bepaal het beeld van H onder de afbeelding

$$z \rightarrow \frac{z+1}{z-1}.$$

Licht met een schets toe wat voor elke $0 < \phi < \pi$ het beeld is van

$$R_\phi = \{z = te^{i\phi}, t \geq 0\}.$$

4. Bereken met behulp van de residustelling met windingsgetallen voor elke $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a - \cos t)^2} dt.$$

Verifieer ook dat aan de aannamen van de stelling is voldaan.

5. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1} dx,$$

voor alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor deze integraal bestaat, met behulp van de residustelling met windingsgetallen. Gebruik een contour die bestaat uit 2 halve cirkels en 2 lijnstukken op de reële as. Verifieer ook dat aan de aannamen van de stelling is voldaan.