

Let op: alleen voor ouderejaars die het vak bij Rene Swarttouw nog niet gehaald hebben. Maak opgaven 1, 2, 3 en 4, totaal 13 onderdelen. Normering: elk onderdeel 2 punten. Cijfer $\frac{5}{12}$ keer het totaal, minimaal 1, maar maximaal 10. Dus een 1 onderdeel kun je overslaan als je de rest helemaal goed doet.

1. We bekijken de functie f gegeven door $f(z) = z^2 e^z$.

a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.

b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$.

2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$.

a) Wat is de convergentiestraal van de machtreeksontwikkeling van $f(z)$ in machten van z rond $z = 0$?

b) Iets lastiger: bepaal de hele machtreeksontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 0$.

c) Laat C de cirkel $|z| = 2$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

d) Bepaal de eerste drie termen van de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van $\frac{1}{z}$ voor z groot. Hint: substitueer eventueel $z = \frac{1}{w}$. Buiten welke cirkel $|z| = \rho$ is deze reeks convergent?

3. Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 4}$ en voor $R > 2$ de krommen

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen.

Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.

c) Bereken met de onderdelen a) en b)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4} dx$$

4. Gegeven zijn de meerwaardige complexe functie

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1}, \text{ met } |z| > 0 \text{ en } -\frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{3}{2}\pi$$

en voor $R > 1 > \epsilon > 0$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \\ \gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq -\epsilon, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

b) Kies een oriëntatie van γ_4 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0.$$

c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

Geef γ een oriëntatie en bereken $\oint_{\gamma} f(z) dz$ voor $R > 1$ en $0 < \epsilon < 1$.

d) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$