

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Complexe Functietheorie
Afdeling Wiskunde	26 augustus 2009
Vrije Universiteit	12.00 - 14.45 uur

Let op: Studenten die het vak Complexe Functietheorie voor Natuurkunde (420169, 4 sp) doen, maken opgaven 1 t/m 4. Studenten die het vak Complexe Functietheorie voor Wiskunde (400386, 6 sp) doen, maken het gehele tentamen.

1. We bekijken de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = ze^z$.
 - a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
 - b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f analytisch is op $\mathbb{C}$.

2. De functie $f : \mathbb{C} \setminus \{i, 3i\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{2z}{(z-i)(z-3i)}$.
 - a) Bepaal de machtreeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $|z| < 1$.
 - b) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $1 < |z| < 3$.
 - c) Laat C de cirkel $|z| = 2$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

[Aanwijzing: gebruik bijvoorbeeld breuksplitsing.]

3. Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}$ en voor $R > 2$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen.
Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.
- c) Leid uit onderdelen a) en b) af dat

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{3\pi}{32e^2}.$$

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de meerwaardige complexe functie

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 1}, \text{ met } |z| > 0 \text{ en } -\frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{3}{2}\pi$$

en voor $R > 1 > \epsilon > 0$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \\ \gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq -\epsilon, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afschatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

b) Kies een oriëntatie van γ_4 en laat met een afschatting zien dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0.$$

c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

Geef γ een oriëntatie en bereken $\oint_{\gamma} f(z) dz$ voor $R > 1$ en $0 < \epsilon < 1$.

d) Bereken

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

5. Gegeven is het complexe polynoom $f(z) = z^5 - z + 16$.

Bepaal het aantal nulpunten van f binnen de ring R , gegeven door

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 2\}.$$

6. a) Bepaal het beeld van de cirkel $|z - i| = 1$ inclusief het binnengebied onder de transformatie $w = \frac{1}{z}$.
b) Bepaal een Möbius transformatie die de regio D_1 , gegeven door $|z| > 1$, afbeeldt op de regio D_2 , gegeven door $\operatorname{Im} w < 0$.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : 5	6 : a) 4
b) 2	b) 3	b) 3	b) 3		b) 4
	c) 2	c) 3	c) 2		
			d) 3		
—	—	—	—	—	—
4	8	9	11	5	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$

[Voor studenten die het vak Complexe Functietheorie voor Natuurkunde (420169, 4 sp) doen, moet eerst het aantal behaalde punten met 45/32 worden vermenigvuldigd.]