

Gebruik van rekenmachine, formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan

1. a) Bepaal de hoofdwaaarde van $(1+i)^{2i}$.
b) Los op in $\mathbb{C}$: $e^z = -3$.

2. We bekijken de functie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = \cos(\bar{z}) = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2}$.

- a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
b) Bereken de partiële afgeleiden van de eerste orde van u en v naar x en naar y .
Is f analytisch op $\mathbb{C}$? Verklaar je antwoord.

3. De functie $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^4}$.

- a) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $0 < |z| < \infty$. Ga daarbij uit van een bekende Taylorreeksontwikkeling rond $z = 0$.
b) Laat C de cirkel $|z| = 2$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.

4. Gegeven is de complexe functie

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 4}.$$

en voor $R > \sqrt{2}$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen. Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.
c) Bereken met behulp van onderdelen a) en b)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 4} dx.$$

Z.O.Z.

5. Gegeven is de complexe functie

$$f(z) = \frac{z^{1/2} \log z}{z^2 + 1}, \text{ met } |z| > 0 \text{ en } -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2},$$

en voor $R > 1 > \rho > 0$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \rho \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \\ \gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq -\rho, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

b) Kies een oriëntatie van γ_4 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0.$$

c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ en laat γ linksom worden doorlopen.
Toon aan dat

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{4} \sqrt{2} \pi^2 (-1 + i).$$

d) Toon aan:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ln x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{4} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}.$$

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 2	5 : a) 2
b) 3	b) 3	b) 2	b) 4	b) 2
			c) 3	c) 3
				d) 4
5	6	5	9	11

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$