

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Complexe Functietheorie
Afdeling Wiskunde	26 augustus 2008
Vrije Universiteit	08.45 - 11.30 uur

Let op: Studenten die het vak Complexe Functietheorie voor Natuurkunde (420169, 4 sp) doen, maken opgaven 1 t/m 4. Studenten die het vak Complexe Functietheorie voor Wiskunde (400386, 6 sp) doen, maken het gehele tentamen.

1. Bekijk de afbeelding $w = e^z$, met $z = x + iy$.
Beschrijf het beeld van het vierkant $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ onder de gegeven afbeelding.

2. We bekijken de functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = z \cos(z) = z \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

- a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
- b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f analytisch is op $\mathbb{C}$.

3. De functie $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$.

- a) Bepaal de machtreeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $|z| < 1$.
- b) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van z op het gebied $2 < |z| < \infty$.

[Aanwijzing: gebruik breuksplitsing.]

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de complexe functie

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$$

en voor $R > 2$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\} \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Bepaal de singulariteiten van $f(z)$ en bereken het residu van $f(z)$ in de singulariteiten die in het bovenhalfvlak ($\operatorname{Im} z \geq 0$) liggen.
b) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- c) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Geef γ een oriëntatie en bereken

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

- d) Bereken $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

5. Gegeven is het complexe polynoom $f(z) = z^4 + 3z^3 + 6$.

Bepaal het aantal nulpunten van f binnen de ring R , gegeven door

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 2\}.$$

6. Bekijk de transformatie $w = f(z) = \frac{i - z}{i + z}$.

Bepaal het beeld van het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Normering:

1 : 6	2 : a) 2 b) 2	3 : a) 3 b) 3	4 : a) 3 b) 2 c) 2 d) 2	5 : 6	6 : 5
_____	_____	_____	_____	_____	_____
6	4	6	9	6	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$

[Voor studenten die het vak *Complexe Functietheorie voor Natuurkunde* (420169, 4 sp) doen, moet eerst het aantal behaalde punten met 36/25 worden vermenigvuldigd.]