

Hertentamen Combinatorische Optimalisatie 29-06-2015.

* Boeken, aantekeningen, rekenmachine, etc. zijn niet toegestaan.

* Gedetailleerde bewijzen worden niet gevraagd. Het gaat erom dat je het belangrijkste idee/principe weet uit te leggen. Bij de opgaven 1,4,en 7 wordt alleen een heel kort antwoord zonder uitleg gevraagd.

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totaal
Max pntn	5	10	10	8	10	10	5	5	10	73

Cijfer = punten/73

Opgave 1 (5 punten).

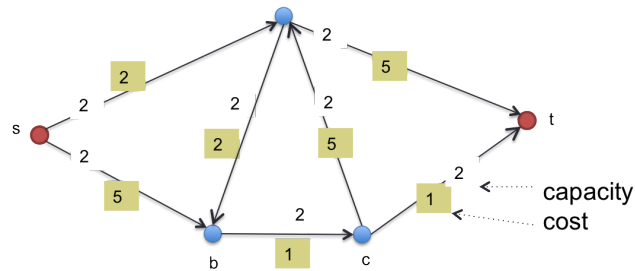
Beantwoord de volgende vragen alleen met ja (waar), nee (niet waar) of laat open. Goed antwoord: +1 punt; Fout antwoord: -0.5 punt; Geen antwoord: +0 punt. (Minimaal aantal punten is 0 punten.)

- (a) $n^2 = O(2^n)$.
- (b) Stel je hebt een algoritme dat het Hamiltonian Cycle probleem in polynomiale tijd kan oplossen. Dan kun je elk probleem in NP oplossen in polynomiale tijd.
- (c) $P \subseteq NP$.
- (d) Het volgende beslissingsprobleem kan in polynomiale tijd worden opgelost: Gegeven een graaf $G = (V, E)$, bestaat er een tour die elke lijn van G precies 1 keer bevat?
- (e) Laat Π_1 en Π_2 beslissingsproblemen in NP zijn. Als Π_1 reduceert tot Π_2 en Π_1 is NP -compleet dan moet gelden dat Π_2 ook NP -compleet is.

Opgave 2 (5+5=10 punten) Het originele max flow algoritme van Ford en Fulkerson heeft een running time die afhankelijk is van de capaciteiten in het netwerk.

- (a) Stel $C = \max_e c_e$ is de maximale capaciteit in het netwerk. (Neem aan dat capaciteiten geheel-tallig zijn.) Laat met een voorbeeld zien dat (voor elke waarde van C) het aantal iteraties (minstens) zo groot kan zijn als C .
- (b) Met welke simpele aanpassing van het originele FordFulkerson algoritme wordt de running time verbeterd zodat deze polynomiaal is in het aantal punten en niet meer afhangt van de capaciteiten? (Beschrijf alleen de aanpassing. Een bewijs wordt niet gevraagd.)

Opgave 3 (10 punten) In onderstaand netwerk laten we een stroom van waarde 2 lopen over het pad s, a, t . De kosten van de deze stroom zijn $2 \cdot (2 + 5) = 14$. Op college is een algoritme gegeven dat bij een beginstroom met waarde v , een stroom met waarde v van minimale kosten vindt. Pas dit algoritme toe om voor het netwerk in de figuur de minimale kosten stroom met waarde 2 te vinden. Neem als beginstroom een stroom over s, a, t met waarde 2.



Opgave 4 (4+4=8 punten) Geef bij de scheduling problemen onder (a) en (b) een optimale volgorde van jobs en geef de optimale waarde.

- (a) Gegeven is een instantie van $1||L_{max}$. Hierbij is het doel het minimaliseren van de maximale *lateness*. De *lateness* van een job j is $L_j = C_j - d_j$.

jobs	1	2	3	4
p_j	2	3	4	5
d_j	12	10	9	4

- (b) Gegeven is een instantie van $1||\sum_j w_j C_j$. Hierbij is het doel het minimaliseren van de gewogen totale completion time.

jobs	1	2	3	4
p_j	1	2	3	4
w_j	4	3	2	1

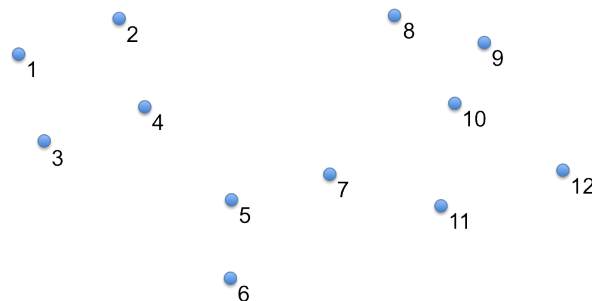
Opgave 5 (3+3+4=10 punten) Het unrelated machine scheduling probleem op m machines ($Rm||C_{max}$) is NP-hard. Op de slides en in het dictaat van Krumke wordt een algoritme gegeven welke altijd een oplossing vindt waarvan de waarde hooguit twee maal de optimale waarde is. (Een 2-approximatie algoritme). In stap 1 wordt een LP opgelost.

- Geef deze LP-formulering. (Slechts 3 punten voor deze vraag deze keer.)
- Beschrijf de rest (Stap 2) van het algoritme.
- Beargumenteer waarom de waarde altijd hooguit twee maal de optimale waarde is.

Opgave 6 (4+6=10 punten) Stel je hebt een algoritme (ALG) voor het MST probleem. Dat wil zeggen, voor een gegeven (samenhangende) graaf $G = (V, E)$ met een gewicht c_e voor elke lijn $e \in E$, vindt het algoritme een opspannende boom van minimaal gewicht.

- (a) Leg uit hoe je algoritme ALG kunt gebruiken voor het oplossen van het volgende probleem. Gegeven is een samenhangende graaf $G = (V, E)$ waarbij elke lijn rood of blauw gekleurd is. Doel is het vinden van een opspannende boom T met een *maximaal* aantal rode lijnen.
- (b) Leg uit hoe je algoritme ALG kunt gebruiken voor het oplossen van het volgende probleem. Gegeven is een samenhangende graaf $G = (V, E)$ en een gewicht c_e plus een kleur (rood of blauw) voor elke lijn $e \in E$. Doel is het vinden van een opspannende boom T die
 - (i) een maximaal aantal rode lijnen heeft en
 - (ii) onder alle opspannende bomen met een maximaal aantal rode lijnen een minimaal gewicht heeft.

Opgave 7 (5 punten) Pas het greedy algoritme voor het k -center probleem toe op onderstaande instantie. Ga uit van de Euclidische afstanden (dus afstanden zoals op papier). Neem $k = 4$ en neem punt 2 als eerste center. Je hoeft alleen de indices van de 4 centers in de gekozen volgorde op te schrijven: 2, ...



Opgave 8 (5 punten) Bij optimaliseringsproblemen kunnen we onderscheid maken tussen het oplossen van het beslissingsprobleem en het daadwerkelijk vinden van een optimale oplossing. Stel je hebt een algoritme ALG dat het beslissingsprobleem van TSP oplost. Dat wil zeggen, voor een *volledige, gewogen* graaf G en getal B geeft het algoritme antwoord op de vraag of er een Hamiltonian cycle bestaat met totaal gewicht hooguit B . Leg uit hoe je met dit algoritme ALG in polynomiale tijd een TSP tour (=Hamiltonian cycle) van minimaal gewicht kunt vinden. Neem aan dat B en alle gewichten geheel-tallig zijn. Neem verder aan dat elke aanroep van ALG één tijdseenheid kost.

Opgave 9 (10 punten) Stel, je bent als zelfstandig consultant aan het werk en er bieden zich voor de komende periode n opdrachten, genummerd $1, 2, \dots, n$, aan. Echter, je zult moeten kiezen welke opdrachten je aanneemt omdat je niet meer dan 1 opdracht tegelijk aankunt. Indien opdracht i wordt aangenomen dan moet deze starten aan het begin van dag d_i (niet eerder en niet later) en de winst die behaald wordt met deze opdracht is w_i . (Dagen zijn genummerd $1, 2, \dots$) Elke opdracht beslaat precies B aaneengesloten hele dagen. Hierbij is B een willekeurig gegeven getal.

Beschrijf een dynamisch programmeringsalgoritme dat de maximale winst bepaalt. (De bijbehorende opdrachten hoeft het niet te geven.) Wat is de gebruikte ruimte (space) en running time van het algoritme?

(Neem aan dat alle gegeven waarden (d_i, w_i, B) positief en geheeltallig zijn.)