

Tussentoets Combinatorische Optimalisatie 25-03-2015.

* Boeken, aantekeningen etc. zijn niet toegestaan.

* Rekenmachines niet toegestaan.

* Beschrijf bij elke opgave (behalve bij 1) steeds het belangrijkste idee. Een gedetailleerd bewijs wordt niet gevraagd. Ook notatie en exacte formulering is van minder belang. Een tekening kan soms handig zijn.

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max pntn	5	5	8	9	5	3	10	45

Cijfer = 1 + punten/5

Opgave 1 (5 punten).

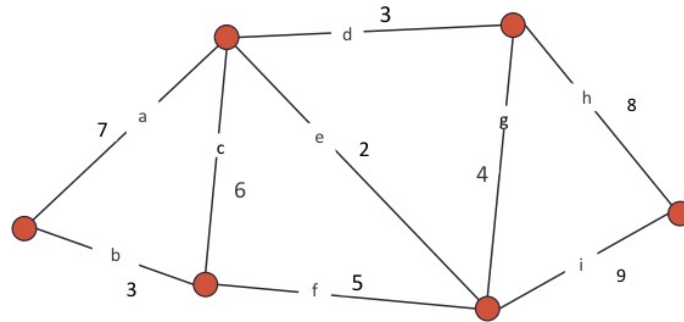
Beantwoord de volgende vragen alleen met ja (waar), nee (niet waar) of laat open. Goed antwoord: +1 punt; Fout antwoord: -1 punt; Geen antwoord: +0 punt. (Minimaal aantal punten is 0 punten.)

- (a) $(\log n)^3 n = O(n^2)$
- (b) Stel je hebt een algoritme dat het traveling salesman probleem (TSP) in polynomiale tijd kan oplossen. Dan kun je ook het satisfiability probleem (SAT) oplossen in polynomiale tijd.
- (c) $P \subseteq NP$.
- (d) Het volgende beslissingsprobleem kan in polynomiale tijd worden opgelost: Gegeven een graaf $G = (V, E)$, heeft G een cykel van lengte precies 100? (cykel wordt circuit genoemd in het dictaat van Schrijver)
- (e) Het kortste pad probleem (shortest path) is reduceerbaar tot het traveling salesman probleem (TSP).

Opgave 2 (5 punten) Gegeven is een netwerk $D = (V, A)$ met $s, t \in V$ en een capaciteit $c(a)$ voor elke pijl $a \in A$. (Standaard max flow instantie). Stel $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ is een maximale stroom van s naar t . Vervolgens passen we de capaciteiten aan: $c'(a) = c(a) + 1$ voor elke pijl waarvoor $c(a) = f(a)$ en $c'(a) = c(a)$ voor alle andere pijlen. De stroom f is nog toegelaten omdat we de capaciteiten nergens verlaagd hebben, maar is deze nog maximaal? Beargumenteer je antwoord.

Opgave 3 (8 punten) Beschrijf de drie minimum spanning tree algoritmes die op het college behandeld zijn. Een korte uitleg van het belangrijkste idee in een paar zinnen is voldoende. Pseudo code wordt niet gevraagd.

Pas vervolgens *elk* van deze algoritmes toe op onderstaande graaf. Als antwoord is het voldoende om de volgorde te geven waarin de lijnen worden toegevoegd (dus bv, $e, b, \dots$ etc.). Als lijnen gelijktijdig worden toegevoegd geef dit dan ook aan.



Opgave 4 (4+5=9 punten) Stel je hebt een algoritme (ALG) voor het TSP probleem. Dat wil zeggen, voor een gegeven *volledige* graaf $G = (V, E)$ en afstanden $c(i, j)$ voor alle $i, j \in V$ vindt het algoritme een tour van minimale totale afstand welke precies 1 keer door elk punt gaat.

- Leg uit hoe je algoritme ALG kunt gebruiken voor het oplossen van het volgende probleem. Gegeven is een *volledige* graaf $G = (V, E)$ waarbij elke lijn rood of blauw gekleurd is. Doel is het vinden van een Hamiltonian cycle T met een minimaal aantal rode lijnen op de tour.
- Leg uit hoe je algoritme ALG kunt gebruiken voor het oplossen van het volgende probleem. Gegeven is een volledige graaf $G = (V, E)$ en een afstand $c(i, j)$ voor elk paar punten $i, j \in V$ en een kleur (rood of blauw) voor elke lijn. Doel is het vinden van een Hamiltonian cycle T die
 - een minimaal aantal rode lijnen heeft en
 - onder alle Hamiltonian cycles met een minimaal aantal rode lijnen de minimale totale afstand heeft.

Opgave 5 (5 punten) Het unrelated machine scheduling probleem op m machines ($Rm||C_{max}$) is NP-hard. Op de slides en in het dictaat van Krumke wordt een algoritme gegeven welke altijd een oplossing vindt waarvan de waarde hooguit twee maal de optimale waarde is. (Een 2-approximatie algoritme). In Stap 1 wordt een LP opgelost. Geef deze LP-formulering.

Opgave 6 (3 punten) Bij scheduling problemen met due dates (deadlines) is de *lateness* L_j van een job j gedefinieerd als de completion time minus de due date: $L_j = C_j - d_j$. Beschouw onderstaande instantie van het probleem $1||L_{max}$. Geef de optimale volgorde van de jobs. (Waarde van de oplossing wordt niet gevraagd).

jobs	1	2	3	4
p_j	3	4	5	6
d_j	11	5	3	12

Opgave 7 (10 punten) McDuck's wil een aantal restaurants openen langs een snelweg. Er zijn n mogelijke locaties (genummerd $1, 2, \dots, n$) langs deze weg en deze liggen op afstanden $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ tot het beginpunt van de weg. De (verwachte) winst van een restaurant op locatie i is w_i . Doel is om per locatie maximaal 1 restaurant te openen zodat de totale (verwachte) winst maximaal is. Echter, de afstand tussen twee restaurants moet minstens B zijn (voor een gegeven getal B).

Beschrijf een dynamisch programmerings algoritme dat de maximale winst bepaald. (De bijbehorende locaties hoeft het niet te geven.) Wat is de gebruikte ruimte (space) en running time van het algoritme?

(Neem aan dat alle gegeven waarden (x_i, w_i, B) positief en geheeltallig zijn.)