

1. a) Uit de gegevens volgt $w = 2e^{i(\frac{3\pi}{7})}$, dus $\bar{w} = 2e^{-i(\frac{3\pi}{7})}$ en $w^3 = 8e^{i(\frac{9\pi}{7})}$. Hieruit volgt: $\frac{\bar{w}}{w^3} = \frac{2e^{-i(\frac{3\pi}{7})}}{8e^{i(\frac{9\pi}{7})}} = \frac{1}{4}e^{-i(\frac{12\pi}{7})} = \frac{1}{4}e^{i(\frac{2\pi}{7})}$. Dus $r = \frac{1}{4}$ en $\phi = \frac{2}{7}\pi$.

b) Met kwadraatafsplitsen vinden we

$$(z + 3 + i)^2 = (3 + i)^2 - 33 - 6i = -25,$$

waaruit volgt dat $z + 3 + i = \pm 5i$. Dus $z_1 = -3 + 4i$ en $z_2 = -3 - 6i$.

2. Basisstap: De bewering klopt voor $n = 1$ want

$$\sum_{k=2}^2 k2^k = 2 \cdot 2^2 = 8 = 1 \cdot 2^{1+2}.$$

Inductiestap: Stel dat de bewering klopt voor een zekere $m \in \mathbb{N}$, dus

$$\sum_{k=2}^{m+1} k2^k = m2^{m+2}.$$

Dan is de bewering ook waar voor $m + 1$, want

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{(m+1)+1} k2^k &= \sum_{k=2}^{m+1} k2^k + (m+2)2^{m+2} \stackrel{I.V.}{=} \\ m2^{m+2} + (m+2)2^{m+2} &= (2m+2)2^{m+2} = (m+1)2^{m+3}. \end{aligned}$$

$$3. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 3x} - 5x^2}{4x + \sqrt{x^4 + 3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 5}{\frac{4}{x} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^3}}} = \frac{1-5}{0+1} = -4.$$

$$\begin{aligned} b) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}} = e, \\ \text{want } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1+2x}{1+x+x^2} = 1. \end{aligned}$$

4. De functie f is continu in 0 dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$.

Welnu:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1,$$

dus

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq x^2.$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, volgt met de insluitstelling dat $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$ en dus dat $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 1$. Dus als $c = 1$ wordt gekozen is f continu in $x = 0$.

5. Volgens de definitie is f differentieerbaar in $x = 0$ dan en slechts dan als er een $L \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = L$. Dat is hier het geval, want

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2+h^3}{\sin(h)} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+h^2}{\sin(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin(h)} \times (1+h) = 1 \times 1 = 1.$$

6. a) Merk eerst op dat de functie zijn minimum en maximum alleen kan aannemen in één van de randpunten, of in een punt waar $f'(x) = 0$. Er geldt $f(-1) = 2e$ en $f(2) = 5e^{-2}$. Verder geldt $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = -(x-1)^2e^{-x}$, dus $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. Omdat $f(1) = 2e^{-1}$ en $5e^{-2} < 2e^{-1} < 2e$ volgt dat het minimum van f op $[-1, 2]$ gelijk is aan $5e^{-2}$ (aangenomen in $x = 2$) en het maximum gelijk is aan $2e$ (aangenomen in $x = -1$). [NB. ook via een tekenoverzicht van de afgeleide kun je dit zien.]
- b) Er geldt $f''(x) = -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2e^{-x} = (x-1)(x-3)e^{-x}$, dus op $[-1, 2]$ is $f''(x) = 0$ in $x = 1$. Via een tekenoverzicht voor f'' wordt duidelijk dat de grafiek van f op $[-1, 2]$ een buigpunt heeft voor $x = 1$, te weten $(1, 2e^{-1})$.

7. Merk eerst op dat e^x een differentieerbare functie is op heel $\mathbb{R}$ en kies vervolgens een willekeurige $x > 0$. Pas vervolgens de Middelwaardstelling toe op het interval $[0, x]$. Dan volgt voor zekere $c \in (0, x)$ dat:

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x} = e^c,$$

waarin $0 < c < x$. Omdat voor $c > 0$ geldt dat $e^c > 1$ volgt hieruit dat $\frac{e^x - 1}{x} > 1$ voor alle $x > 0$, dus dat $e^x > 1 + x$.

8. We bepalen eerst de 1^e tot en met de 3^e afgeleide:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^{-3/2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}(x+3)^{-5/2}.$$

Nu $x = 1$ invullen in de functie en bovenstaande afgeleiden: $f(1) = 2, f'(1) = \frac{1}{4}, f''(1) = -\frac{1}{32}, f'''(1) = \frac{3}{256}$. Tenslotte volgt dan het derdegraads Taylorpolynoom van f rond $x = 1$:

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{64}(x-1)^2 + \frac{1}{512}(x-1)^3.$$

9. a) Met de hoofdstelling van de Calculus volgt

$$f'(x) = e^{(\sin(x))^2} \cos x,$$

$$\text{dus } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{3/4}.$$

- b) We gebruiken de substitutiemethode:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} dx \stackrel{t=\sin(x)}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$