

Tentamen – Biomedische wiskunde

29 mei 2012; 15:15-18:00; WN-M143

NB. Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau. Het gebruik van een (ouderwetse) rekenmachine is toegestaan, maar niet dat van een programmeerbare danwel grafische rekenmachine of een mobiele telefoon. Veel succes!

Normering:

- 1a) 3, 1b) 1, 1c) 3, 1d) 3
2a) 3, 2b) 1, 2c) 3
3a) 1, 3b) 4, 3c) 2
4a) 2, 4b) 4, 4c) 3

Tentamencijfer is puntentotaal / 33.

Vraag 1

De omvang (n) van een celpopulatie over de tijd ($t = 1, 2, 3, \dots$) laat zich beschrijven middels een eerste orde Markov proces. Voor elke tijdstap, is het mogelijk dat één cel uit de populatie doodgaat. Dit gebeurt met kans λ . Gelijktijdig kan één cel uit de populatie zich in tweeën splitsen, een gebeurtenis met kans μ . De tijdstappen zijn dusdanig klein gekozen dat de kans op het gelijktijdig doodgaan (of splitsen) van meerdere cellen verwaarloosbaar is. Veronderstel een maximale populatieomvang (n_{max}) van 3 cellen. Indien dit maximum wordt bereikt, stoppen de cellen met sterven en delen.

Vraag 1a)

Geef de toestandsruimte en transitie-matrix van dit proces. Specificeer daarbij de restricties op λ en μ . Teken ook het *state diagram* met daarin van elke overgang de bijhorende kans.

Vraag 1b)

Heeft dit proces een stationaire verdeling? Motiveer je antwoord.

Vraag 1c)

De populatieomvang is nu maximaal 2 ($n_{max} = 2$). Veronderstel verder dat $n = 1$ op $t = 1$. Bereken de kans dat de populatie uitsterft. Evenzo, de kans dat de populatie eeuwig voortbestaat. Voor welke keuzes van λ en μ is de kans dat de populatie uitstreft groter dan dat zij eeuwig voortbestaat?

Vraag 1d)

Terug naar $n_{max} = 3$. Laat $\lambda = 0.1 = \mu$. Is de kans dat de populatie uitstreft groter dan dat zij eeuwig voortbestaat?

Vraag 2

Twee hedendaagse organismen met een binaire genetische code (bestaande uit nullen en éénen) hebben een gemeenschappelijke voorouder. Het substitutie-proces in een willekeurige locus volgt een eerste orde Markov proces. De kans op een substitutie, ongeacht welke, is gelijk aan α .

Vraag 2a)

Zij $\alpha = 0.10$. Slechts één generatie scheidt de organismen van hun gemeenschappelijk voorouder. De locus van één van de hedendaagse organismen bevat een nul. Wat is dan de kans dat de locus van de gemeenschappelijke voorouder ook door een nul bezet wordt (vergeet hierbij het bestaan van het andere hedendaagse organisme)?

Vraag 2b)

Alle aannames zijn hetzelfde als bij Vraag 2a. Echter, beschouw nu twee onafhankelijke loci. De beide loci van één van de hedendaagse organismen bevatten een nul. Wat is dan de kans dat de loci van de gemeenschappelijke voorouder ook door nullen bezet worden?

Vraag 2c)

Zij nu $\alpha = 0.5$. Veronderstel het aantal generaties tussen de twee hedendaagse organismen en hun gemeenschappelijke voorouder onbekend. Beschouw wederom twee onafhankelijke loci. Op een van de twee loci verschilt het DNA tussen beide hedendaagse organismen. Geef de likelihood voor de geobserveerde twee loci.

Vraag 3

We beschouwen de dichtheid $u(t, x)$ van een organisme dat zich voorplant en beweegt op domein $\mathbb{R}$. De dynamica in non-dimensionale vorm wordt gegeven door

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u^2),$$

waarbij $a > 0$.

Vraag 3a)

Stel dat $u(t, x) = U(z)$, met $z = x - ct$, een lopende golfoplossing is die $u = 0$ met $u = 1$ verbindt. Geef de differentiaalvergelijking waar U aan voldoet.

Vraag 3b)

Bepaal onder welke voorwaarden dergelijke lopende golfoplossingen $U(z)$ bestaan. Bekijk met name welke snelheden deze golf aan kan nemen.

Vraag 3c)

Bepaal of de lopende golf naar links of rechts loopt. Met andere woorden, bepaal het teken van c .

Vraag 4

We beschouwen de concentraties van twee chemische stoffen, aangegeven met $u(t, x)$ en $v(t, x)$. Deze diffunderen en reageren op een één-dimensionaal domein $[0, L]$. De dynamica wordt gegeven (in non-dimensionale vorm) door

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - u + u^2 v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b - u^2 v,\end{aligned}$$

met Neumann randvoorwaarden, waarbij $a, b > 0$.

Vraag 4a)

Het stelsel heeft een niet-triviaal spatieel homogeen evenwicht (u_0, v_0) ,

$$u_0 = a + b, \quad v_0 = \frac{b}{(a + b)^2}.$$

Bepaal onder welke voorwaarden dit homogene evenwicht stabiel is in afwezigheid van diffusie.

Vraag 4b)

We perturberen het uniforme evenwicht (u_0, v_0) met functies die (kleine) veelvouden zijn van de k -de eigenfunctie corresponderend met ruimtelijke eigenwaarde μ_k , $\cos(\frac{k\pi}{L}x)$. Bepaal onder welke voorwaarden het evenwicht instabiel is voor dergelijke perturbaties.

Vraag 4c)

Leg uit met behulp van een plaatje hoe je kunt bepalen welke ruimtelijke perturbaties instabiel zijn.