

Tentamen Bedrijfseconometrie deel 1

20 oktober 2008, 08.45-10.45

Opgave 1

Beschouw onderstaand LP probleem in standaardvorm ($\mathbf{A}$ is een $m \times n$ matrix met rang m , $\mathbf{x}$ een $n \times 1$ vector, $\mathbf{c}$ een $n \times 1$ vector, en $\mathbf{b}$ een niet negatieve $m \times 1$ vector):

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Onder} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (1)$$

Zij $\mathbf{B}$ de optimale basis van probleem (1) met bijbehorende optimale oplossing $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Beschouw tenslotte probleem (2) dat gelijk is aan probleem (1) behalve dat de rechterkant $\mathbf{b}$ is gewijzigd tot $\mathbf{b}'$.

- 1a)** In welke gevallen is $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$ optimaal voor probleem (2)?
Licht toe waarom de oplossing optimaal is in deze gevallen.
- 1b)** Gesteld dat $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$ niet optimaal is voor probleem (2). Hoe kan dan het beste een optimale basis en bijbehorende basisoplossing worden gevonden?

Opgave 2

Bereken met het Branch-en-Bound algoritme een optimale oplossing voor het volgende geheeltallige probleem:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 13x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{Onder} & 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$

Begin de berekening met de ondergrans $LB=0$.

Opgave 3

Een firma produceert tassen. Voor de komende vier perioden zijn de volgende gegevens bekend:

Tabel 1

Periode	Vraag	Productiekosten	Voorraadkosten
1	30	10	3
2	40	15	3
3	50	15	2
4	60	14	

In iedere periode kan de firma tassen produceren. De daarbij horende productiekosten staan in Tabel 1. Zo is af te lezen dat de kosten in periode 2 gelijk zijn aan 15 per tas.

Levering aan de klanten geschiedt aan het einde van de periode. Ook de vraag per periode staat in tabel 1. Aan het einde van iedere periode moet aan de vraag van die periode zijn voldaan (naleveren of nee-verkopen is niet toegestaan).

In periode 1, 2 en 3 mag meer worden geproduceerd dan nodig voor de betreffende periode. Er kan zo voorraad ontstaan aan het einde van een periode, die in de volgende perioden kan worden verkocht. De in de tabel vermelde voorraadkosten zijn de kosten voor het in voorraad houden van een tas die aan het einde van de betreffende periode in voorraad is.

In totaal moeten in de vier perioden precies 180 tassen worden geproduceerd, zodanig dat de voorraad aan het einde van periode vier gelijk is aan nul.

Bovenstaand probleem kan worden geformuleerd als een minimum-kosten stroom probleem op een netwerk $G = (V,A)$ dat kan worden geformuleerd als:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Onder} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

dat met de netwerk simplex methode opgelost kan worden.

- 3a) Teken het netwerk G en verwerk daarin de gegevens van Tabel 1.
- 3b) Specificeer de matrix $\mathbf{A}$ en de vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.
- 3c) Construeer de opspannende boom bij het productieschema waarbij in periode 1 de vraag voor alle vier de perioden wordt geproduceerd en bepaal de bijborende opspannende boom oplossing.
- 3d) Voer uitgaande van de opspannende boom oplossing van 3c) één volgende iteratie uit van de netwerk simplex methode resulterende in een verbeterde oplossing.

Opgave 4

4a,b) Vrachtwagenrouteringsproblemen kunnen soms opgelost worden door het probleem te formuleren als een Set Partitioningsprobleem en dit laatste probleem op te lossen.
(Onder een vrachtwagenrouteringsprobleem wordt verstaan het vinden van een verzameling routes voor wagens, zodanig dat deze wagens orders van gegeven omvang op de meest efficiënte wijze op gegeven afleveradressen kunnen bezorgen; al dan niet rekening houdend met randvoorwaarden met betrekking tot capaciteit, tijd, etc.)

4a) Geef aan (dit mag aan de hand van een voorbeeld) hoe de eigenschappen van een vrachtwagenrouteringsprobleem kunnen worden vertaald in het Set Partitioning model.

4b) Geef aan van welke eigenschappen van het vrachtwagenrouteringsprobleem bepalen of de modellering als Set Partitioningsprobleem zinnig is.

4c)

Voor het vinden van een (lokaal) minimum van een (tweemaal continu differentieerbare) functie kunnen zoekmethoden worden gebruikt die zijn gebaseerd op het herhaald uitvoeren van de stap:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

Hierin is het punt $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ de k-de poging (schatting of benadering van het minimum), $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$ de zoekrichting naar het volgende punt en $\alpha_k \in \mathbb{R}$ een scalair die zorgt voor de stapgrootte tot het volgende punt.

Voor het bepalen van de zoekrichting $\mathbf{p}_k$ bestaan verschillende methoden, waaronder de steepest descent (gradiënt methode), de methode van Newton en de quasi-Newton methoden. Wat zijn voor- en nadelen van deze verschillende manieren om de zoekrichting te bepalen?