

Tentamen Basisconcepten Wiskunde

19 December 2014, 12.00-14.00.

Maak alle 6 opgaven. Antwoorden zonder uitleg scoren doorgaans niet goed. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan. Het cijfer wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + (\text{behaalde punten})/10$. Succes!

Opgave 1. (15 punten) Bepaal alle complexe getallen z waarvoor geldt $z^4 = -16$.

Opgave 2. (15 punten) Bewijs met volledige inductie dat voor alle $r \neq 1$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Opgave 3. (15 punten) Laat $F_1, F_2, F_3, \dots$ de rij van Fibonacci zijn. We definiëren een andere rij $G_1, G_2, G_3, \dots$ door $G_1 = 1, G_2 = 1$ en $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n + G_{n+1}G_n$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat $G_n = 2^{F_n} - 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4. (15 punten) Beschouw de verzameling

$$V = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, A \text{ is eindig}\}.$$

Laat zien dat V aftelbaar oneindig is.

Opgave 5. Stel ik heb vier wiskundeboeken, vijf boeken over natuurkunde en twee taalboeken.

(a) (5 punten) Op hoeveel verschillende volgordes kan ik deze boeken op een boekenplank zetten?

(b) (5 punten) Op hoeveel manieren kan ik deze boeken op een boekenplank zetten zodanig dat alle boeken per onderwerp bij elkaar staan? (Dus de wiskunde boeken bij elkaar, etcetera.)

(c) (5 punten) Hoeveel deelverzamelingen van vier boeken zijn er waarvan er precies twee wiskundeboeken zijn?

Opgave 6. (a) (10 punten) Bepaal met behulp van het Euclidisch algoritme de ggd van 1002 en 303.

(b) (5 punten) Bepaal gehele getallen a en b zodanig dat $\text{ggd}(1002, 303) = 1002 \cdot a + 303 \cdot b$.