

Maak alle opgaven. Leg je antwoorden uit. Aantekeningen, boeken, rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen zijn **niet** toegestaan. Als je een onderdeel van een vraag niet kunt maken, mag je het antwoord wel gebruiken in de rest van de opgave. Het cijfer voor het tentamen wordt berekend met de formule $\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{behaalde punten}}{10}$. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Bereken $\text{ggd}(561, 459)$ en vind getallen $x, y \in \mathbb{Z}$ zodat

$$\text{ggd}(561, 459) = 561x + 459y.$$

Uitwerking 1. We passen het uitgebreide Euclidische Algoritme toe. De staartdelingen heb ik niet opgeschreven.

r_i	x_i	y_i	q_i
561	1	0	
459	0	1	1
102	1	-1	4
51	-4	5	2
0	9	-11	

Dus $\text{ggd}(561, 459) = 51$ en $x = -4$ en $y = 5$ is een oplossing.

Opgave 2 (10 punten). Zij G_1 en G_2 groepen, en $f : G_1 \rightarrow G_2$ een homomorfisme. Bewijs dat

$$A = \{(x, y) \in G_1 \times G_2 \mid y = f(x)\},$$

een ondergroep is van $G_1 \times G_2$.

Uitwerking 2. Omdat f een homomorfisme is geldt dat $f(e_1) = e_2$, met e_1 en e_2 de eenheden in respectievelijk G_1 en G_2 . De verzameling A is niet leeg, omdat $(e_1, e_2) \in A$. Zij nu $a, b \in A$. Dan zijn er $x, z \in G_1$ zodat $a = (x, f(x))$ en $b = (z, f(z))$. Omdat f een homomorfisme is geldt $f(xz) = f(x)f(z)$ en $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Hieruit volgt dat $a^{-1} = (x^{-1}, (f(x))^{-1}) = (x^{-1}, f(x^{-1}))$, dus $a^{-1} \in A$ en $ab = (xz, f(x)f(z)) = (xz, f(xz))$, dus $ab \in A$. Hiermee is bewezen dat A een ondergroep is van $G_1 \times G_2$.

Opgave 3 (7+3 punten). Zij $\sigma \in S_9$ de permutatie

$$\sigma = (123)(1234)(56)(589).$$

- Schrijf σ als een product van disjuncte cycli.
- Wat is het cykeltype van σ ?

Uitwerking 3. Dit is een uitschrijven.

- Uitvermenigvuldigen geeft

$$\sigma = (1342)(5896).$$

- Het cykeltype van σ is dus $(4, 4, 1)$.

Opgave 4 (3+12 punten). Zij G een groep en $x \in G$.

- Geef de definitie van de orde van x .
- Zij H een groep en $f : G \rightarrow H$ een homomorfisme. Zij $x \in G$ een element van eindige orde. Bewijs dat de orde van $f(x)$ de orde van x deelt.

Uitwerking 4. De orde van een element $x \in G$ is het kleinste getal $n \in \mathbb{N}$ zodat $x^n = e$. Als zo'n n niet bestaat is de orde van x oneindig. Zij x nu een element van eindige orde n . Dan geldt dat $f(x)^n = f(x^n) = f(e) = e'$, met $e' \in H$ de eenheid. Dus de orde van $f(x)$ is eindig en kleiner dan de orde van x . Zij m nu de orde van $f(x)$. Uit staartdeling weten we dat we kunnen schrijven $n = qm + r$, met $0 \leq r < m$ en $q \in \mathbb{N}$, en dat laatste omdat $n \geq m$. Dan berekenen we

$$e' = f(x)^n = f(x)^{qm+r} = (f(x)^m)^q f(x)^r = (e')^q f(x)^r = f(x)^r$$

Omdat m het kleinste getal $m \in \mathbb{N}$ is zodat $f(x)^m = e$, concluderen we dat $r = 0$, en dus dat $n = qm$.

Opgave 5 (10 + 10 punten).

- Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ er geldt dat $n! > 2^n$.
- Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ er geldt dat $7|11^n - 4^n$.

Uitwerking 5. We doen beide opgaven met inductie.

- Het is duidelijk dat voor $n = 4$ er geldt dat $24 = 4! > 16 = 2^4$. Stel dat voor $n \geq \mathbb{N}$ geldt dat $n! \geq 2^n$. Dan berekenen we, gebruik makend van de inductiehypothese, dat

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n.$$

Voor alle $n \geq 4$ geldt dat $n+1 > 2$ dus $(n+1)! > 2^{n+1}$.

- Voor $n = 1$ is het duidelijk dat $11^1 - 4^1 = 7$ en $7|7$. Stel dat $7|11^n - 4^n$ voor een $n \in \mathbb{N}$. We schrijven, met behulp van een staartdeling

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11(11^n - 4^n) + (11 - 4)4^n.$$

Volgens de inductiehypothese is $7|11^n - 4^n$, dus 7 deelt de eerste term. Maar $7|11 - 4$ natuurlijk ook en dus deelt 7 de tweede term, en dus ook de som. Dus $7|11^{n+1} - 4^{n+1}$. Waarmee met inductie het gevraagde bewezen is.

Opgave 6 (10 punten). Zij $a, b \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $a + b$ een priemgetal is. Bewijs dat

$$\text{ggd}(a, b) = 1.$$

Uitwerking 6. Merk op dat a, b positieve getallen zijn. Stel dat $a + b$ een priemgetal is. Per definitie $\text{ggd}(a, b)|a$ en $\text{ggd}(a, b)|b$, en dus ook $\text{ggd}(a, b)|a + b$. Uit de priemeigenschappen volgt dat $\text{ggd}(a, b) = a + b$ of $\text{ggd}(a, b) = 1$. Maar $a + b > a$ en $a + b > b$, dus de eerste optie is onmogelijk. Er volgt dat $\text{ggd}(a, b) = 1$.

Opgave 7 (15 punten). Herinner je het volgende. Voor $x \in (0, 1)$ hebben we een unieke decimale expansie

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots$$

van de volgende vorm. Voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_k \in \{0, \dots, 9\}$, en er is geen $N \in \mathbb{N}$ zodat $x_k = 9$ voor alle $k > N$. Bewijs dat de verzameling

$$S = \{0.x_1x_2x_3 \dots \in (0, 1) \mid x_5 = 3\}$$

overaftelbaar is.

Uitwerking 7. Dit kan op twee manieren. Je kan het diagonaalargument van Cantor reproduceren, of een bijectie construeren naar een bekende overaftelbare verzameling. We doen beide bewijzen. Eerst reproduceren we Cantor. Stel dat er een surjectieve functie $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ is. Noteer

$$f(n) = 0.x_1^n x_2^n x_3^n \dots$$

Dan construeren we het getal $b = 0.b_1b_2b_3 \dots$ door middel van

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{als } i < 5 \text{ en } a_i^i = 2, \text{ of } i > 5 \text{ en } a_{i+1}^{i+1} = 2 \\ 2 & i < 5 \text{ en } a_i^i \neq 2, \text{ of } i > 5 \text{ en } a_{i+1}^{i+1} \neq 2 \\ 3 & i = 5. \end{cases}$$

Merk op dat $b \neq f(n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, want als $n < 5$, dan $b_n \neq x_n^n$ en als $n \geq 5$, dan $b_{n+1} \neq x_n^n$. Dus er bestaat geen surjectieve functie. Het is duidelijk dat S oneindig is, dus S is overaftelbaar.

Nu het andere bewijs. Definieer $f : S \rightarrow (0, 1)$ door middel van

$$f(0.x_1x_2x_3 \dots) = 0.a_1a_2a_3 \dots$$

met $a_i = x_i$ voor $i < 5$. en $a_i = x_{i+1}$ anders. Deze functie is welgedefinieerd, door de schrijfwijze die we hanteren. Deze functie is ook bijectief. We definiëren de inverse $g : (0, 1) \rightarrow S$ door middel van

$$g(0.a_1a_2a_3 \dots) = 0.x_1x_2x_3 \dots$$

met $x_i = a_i$ voor $i < 5$, $x_5 = 3$ en $x_i = a_{i-1}$ voor $i > 5$. Het is makkelijk te controleren dat dit een inverse is. f is een bijectie, en $(0, 1)$ is overaftelbaar, dus S is overaftelbaar.