1. We lossen eerst de homogene vergelijking op. Substitutie van $y(x) = e^{\lambda x}$ levert de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, met (enige) reële oplossing $\lambda = -1$. Dus de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking luidt

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x},\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Een particuliere oplossing krijgen we door $y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ te proberen. Dan geldt $y'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$ en $y''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$. Als we dit in de inhomogene vergelijking invullen vinden we

$$(-3A - 4B)\sin(2x) + (4A - 3B)\cos(2x) = 25\sin(2x), \quad \text{dus} \quad \begin{cases} -3A - 4B = 25 \\ 4A - 3B = 0 \end{cases}$$

met oplossing $A = -3, B = -4$. Dus de algemene oplossing van deze inhomogene differentiaalvergelijking luidt dus:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 3\sin(2x) - 4\cos(2x),\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Invullen van de eerste beginvoorwaarden levert $c_1 - 4 = -4$, dus $c_1 = 0$. De tweede beginvoorwaarde levert vervolgens: $c_2 - 6 = -3$, dus $c_2 = 3$. De oplossing van het beginwaardeprobleem luidt dus $y(x) = -3xe^{-x} - 3\sin(2x) - 4\cos(2x)$.

2. a) Bekijk eerst de absolute waarde: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2+3n+1}$. Vergelijk nu met $\frac{1}{n}$ en gebruik daarbij de limiettest:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n^2+3n+1} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2+3n+1} = \frac{1}{2}.$$

Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergeert (p-reeks met $p = 1$), divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2+3n+1}$ ook.
Er is dus geen sprake van absolute convergentie.
Vervolgens passen we de alternerende-reeks test toe op de oorspronkelijke reeks: (i) de reeks is alternerend, (ii) $\left\{\frac{n+3}{2n^2+3n+1}\right\}$ is dalend [stel $f(x) = \frac{x+3}{2x^2+3x+1}$, dan $f'(x) = -\frac{2x^2+12x+8}{(2x^2+3x+1)^2} < 0$, dus f is dalend], (iii) de algemene term gaat naar 0. Aan alle voorwaarden is voldaan, dus de reeks convergeert. Omdat er geen sprake is van absolute convergentie, convergeert de reeks dus relatief.

b) We maken gebruik van de quotiënttest:

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \div (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \infty > 1.$$

Er is dus sprake van divergentie (de algemene term gaat zelfs niet naar 0).

3. a) De puntsgewijze limiet is $f(x) = 0$ voor alle $x \in [0,1]$, want $\arctan 0 = 0$ en $\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \frac{1}{2}\pi$ voor $x \in (0,1]$. Laat nu $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven zijn. Kies $n^* > \frac{\pi}{2\varepsilon}$. Dan volgt voor alle $n > n^*$ en voor alle $x \in [0,1]$ dat

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\arctan(nx)}{n}\right| < \frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2n^*} < \varepsilon.$$

De convergentie is dus uniform op $[0,1]$.

b) Omdat $f_n'(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ is de puntsgewijze limiet op $[0,1]$ gelijk aan

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 0 \\ 0 & \text{als } x \in (0,1] \end{cases}$$

Als er wél sprake zou zijn van uniforme convergentie, dan zou g continu moeten zijn op $[0,1]$, omdat alle f_n' continu zijn op $[0,1]$. Dat is niet zo, dus er is wel puntsgewijze, maar geen uniforme convergentie op $[0,1]$.

4. a) Stel $a_n = \dfrac{(3x-1)^{2n}}{n\,4^n}$ en gebruik de quotiënttest:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|3x-1|^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{(3x-1)^2}{4}.$$

Als $\frac{(3x-1)^2}{4} < 1$, dus als $-\frac{1}{3} < x < 1$, dan is de reeks absoluut convergent. Als $\frac{(3x-1)^2}{4} > 1$, dus als $x < -\frac{1}{3}$ of als $x > 1$, dan divergeert de reeks. Nu nog de randpunten $x = -\frac{1}{3}$ en $x = 1$ bekijken. Die geven beide dezelfde reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, die divergent is ($p$-reeks met $p = 1$). Het convergentie-interval is dus $(-\frac{1}{3}, 1)$.

b) Binnen het convergentie-interval mogen we termsgewijs differentiëren. Daarmee vinden we

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n(3x-1)^{2n-1}}{n4^n} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^{2n-1}}{4^n}.$$

Als we hierin $x = 0$ invullen, dan vinden we een convergente meetkundige reeks:

$$f'(0) = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4^n} = -6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = -6\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = -2.$$

5. a) f is differentiable at $(0,0)$ if

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - f_{x_1}(0,0)h_1 - f_{x_2}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

We have

$$f_{x_1}(0,0) = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{h_1^3+0}{\sqrt{h_1^2+0^2}} - 0}{h_1} = \lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^3}{h_1|h_1|} = \lim_{h_1\to 0}|h_1| = 0$$

and

$$f_{x_2}(0,0) = \lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,h_2)-f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0}\frac{\frac{0-0}{\sqrt{0^2+h_2^2}} - 0}{h_2} = 0.$$

Then,

$$\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f_{x_1}(0,0)h_1-f_{x_2}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\frac{h_1^3+37h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^3+37h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$$

which converges to zero. To see this, fix $\varepsilon > 0$ and $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{37}}$. For $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ with $||(h_1,h_2)|| < \delta$, we have

$$\begin{aligned}\left|\frac{h_1^3+37h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}-0\right| &\leq \frac{|h_1|h_1^2+37|h_1|h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \frac{|h_1|(h_1^2+h_2^2)+36|h_1|h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \\ &\leq \frac{|h_1|(h_1^2+h_2^2)+36|h_1|(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2} = 37|h_1| < 37\delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

This shows that $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f_{x_1}(0,0)h_1-f_{x_2}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$ and, therefore, f is differentiable at $(0,0)$.

b) Since f is differentiable at $(0,0)$, we have that for all unit vectors $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \mathbf{u} = (0,0)\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Therefore, there exists no unit vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ with $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) \neq 0$.

6. First, we calculate $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ applying the chain rule.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} = f_u \cdot x_2 + f_v \cdot \frac{1}{x_1}.$$

Next, we calculate $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}$ applying the chain rule and the product rule when needed.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 f_u + \frac{1}{x_1}f_v\right) = f_u + x_2\left(\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) \\ &= f_u + x_2\left(f_{uu}\cdot x_1 + f_{uv}\cdot\frac{1}{x_2}\right) + \frac{1}{x_1}\left(f_{vu}\cdot x_1 + f_{vv}\cdot \frac{1}{x_2}\right) \\ &= f_u + x_1x_2 f_{uu} + 2f_{uv} + \frac{1}{x_1x_2}f_{vv}\end{aligned}$$

where the last inequality follows because $f_{uv} = f_{vu}$ since f has continuous second order partial derivatives.

7.
- Critical points: $\nabla f(x_1,x_2) = (0,0)$.

$$\nabla f(x_1,x_2) = (3x_1^2-4x_1x_2, -2x_1^2+2x_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2-4x_1x_2 = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - 4x_1^3 = 0 \\ x_2 = x_1^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2(3-4x_1) = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ and } x_2 = 0, \\ x_1 = \frac{3}{4} \text{ and } x_2 = \frac{9}{16}\end{cases}$$

- To check the nature of this points, we need the Hessian matrix of f:

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1-4x_2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2\end{pmatrix}.$$

★ $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$:

$$Hf\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

We have $\det(A_1) = \frac{3}{4} > 0$ and $\det(A_2) = -\frac{9}{2} < 0$. Thus, $Hf\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$is indefinite and f has a saddle point at $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$.

★ $(0,0)$:

$$Hf\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

which is positive semidefinite and we need to further investigate the nature of $(0,0)$. Note that for $r > 0$, $\left(\frac{r}{2}, 0\right), \left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r)$. Moreover,

$$f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{r^3}{8} > 0 = f(0,0)$$

and f does not have a maximum at $(0,0)$, and

$$f\left(-\frac{r}{2}, 0\right) = -\frac{r^3}{8} < 0 = f(0,0)$$

and f does not have a minimum at $(0,0)$. Therefore, f has a saddle point at $(0,0)$.

8. a) We use the substitution $u_1 = 2x_1 + x_2$, $u_2 = 2x_1 - x_2$. Then,

$$\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = 4 \neq 0$$

for every $(x_1, x_2) \in D$ and $du_1 du_2 = 4dx_1 dx_2$. Moreover,

$$D_{u_1,u_2} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq u_1 \leq 9, 0 \leq u_2 \leq 4\}$$

and $\sqrt{4x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{(2x_1 + x_2)(2x_1 - x_2)} = \sqrt{u_1 u_2}$. Therefore,

$$\iint_D \sqrt{4x_1^2 - x_2^2} dA = \frac{1}{4} \iint_D \sqrt{4x_1^2 - x_2^2} 4dA = \frac{1}{4} \int_0^4 \left[\int_1^9 \sqrt{u_1 u_2} du_1\right] du_2$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^4 \left[\frac{2}{3} u_1^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 \sqrt{u_2} du_2 = \frac{27 - 1}{6} \int_0^4 \sqrt{u_2} du_2 = \frac{26}{6} \left[\frac{2}{3} u_2^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{208}{9}.$$

b) We use polar coordinates: $x_1 = r\cos\phi$ and $x_2 = r\sin\phi$, where $r \geq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Besides, $dA = rdrd\phi$. Then,

$$\iint_D \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dA = \lim_{m\to\infty} \iint_{D\cap\bar{B}((0,0),m)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dA = \lim_{m\to\infty} \int_1^m \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^3} r d\phi\right] dr$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_1^m \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2} dr = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_1^m \left(-\frac{1}{r}\right)' e^{-\frac{1}{r}} dr = \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[e^{-\frac{1}{r}}\right]_1^m$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(e^{-\frac{1}{m}} - e^{-1}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$