Faculteit der Bètawetenschappen	2e deeltentamen Analysis II
Afdeling Wiskunde	01-06-2018
Vrije Universiteit	08:45-11:30 uur

1. Zij $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{4} < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$.
   a) Teken de verzameling G.
   b) Bepaal het inwendige, de rand, en de verdichtingspunten van G.
   c) Is G open, gesloten, of geen van beide? [Verklaar je antwoord.]
   d) Is G convex? Is G samenhangend? [Verklaar je antwoord.]

2. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3(x_2+1)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{als } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{als } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Toon aan dat f continu is in $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
   b) Bereken $f_{x_1}(0, 0)$ en $f_{x_2}(0, 0)$.
   c) Is f differentieerbaar in $(0, 0)$? [Verklaar je antwoord.]
   d) Zij $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ met $||\mathbf{u}|| = 1$. Bepaal $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$.

3. De functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door $g(u_1, u_2) = (u_1^2 - u_2^2, u_1 u_2)$.
   a) Voor welke waarden van (u_1, u_2) is g (lokaal) inverteerbaar?
   b) De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heeft continue partiële afgeleiden van de tweede orde op heel $\mathbb{R}^2$. Gegeven is $z = f(g(u_1, u_2))$. Bereken $\frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2}$ in termen van u_1 en u_2, en partiële afgeleiden van f.

4. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 - x_1^2 - x_2^2$.
   a) Bereken de gradiënt en de Hesse matrix van f.
   b) Is f convex, concaaf, of geen van beide? [Verklaar je antwoord.]
   c) Vind de kritieke punten van f en bepaal hun aard.

5. Vind het maximum en minimum van $x_1 - x_2$ onder de nevenvoorwaarde $x_1^2 + 2x_2^2 = 74^2$.

6. Bereken de dubbelintegraal $\int_0^1 \left[\int_{2x_2}^2 \frac{96x_2^2}{x_1^4+1} dx_1\right] dx_2$.

7. Gebruik substitutie om de dubbelintegraal $\iint_D x_1 x_2 dA$ te berekenen, waarbij $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} | x_2^2 \leq x_1 \leq 3x_2^2, x_1^2 \leq x_2 \leq 2x_1^2\}$. [Teken de verzameling D.]

8. Bereken de integraal $\displaystyle\iiint_D \frac{x_3}{\sqrt[6]{x_1^2 + x_2^2}} dA$ waarbij $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 1\}$. [Gebruik cilindercoördinaten.]

Engels op de achterkant

1. Let $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{4} < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$.

   a) Sketch G.

   b) Specify the interior, the boundary, and the accumulation points of G.

   c) Is G open, closed, or neither? [Explain your answer.]

   d) Is G convex? Is G connected? [Explain your answer.]

2. The function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is defined by

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3(x_2+1)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{if } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Show that f is continuous in $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

   b) Calculate $f_{x_1}(0,0)$ and $f_{x_2}(0,0)$.

   c) Is f differentiable at $(0,0)$? [Explain your answer.]

   d) Let $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ with $||\mathbf{u}|| = 1$. Calculate $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$.

3. The function $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is defined by $g(u_1, u_2) = (u_1^2 - u_2^2, u_1 u_2)$.

   a) For which values of (u_1, u_2) does g have a (local) inverse function?

   b) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ have continuous second order partial derivatives on $\mathbb{R}^2$. Let $z = f(g(u_1, u_2))$. Calculate $\frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2}$ in terms of u_1 and u_2, and partial derivatives of f.

4. Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, with $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 - x_1^2 - x_2^2$.

   a) Give the gradient and the Hessian matrix of f.

   b) Is f convex, concave, or neither? [Explain your answer.]

   c) Find all critical values of f and classify them.

5. Find the maximum and the minimum of $x_1 - x_2$ under the restriction $x_1^2 + 2x_2^2 = 74^2$.

6. Calculate the double-integral $\int_0^1 \left[\int_{2x_2}^2 \frac{96x_2^2}{x_1^4+1} dx_1\right] dx_2$.

7. Use substitution to calculate the double-integral $\iint_D x_1 x_2 dA$, where $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | x_2^2 \leq x_1 \leq 3x_2^2, x_1^2 \leq x_2 \leq 2x_1^2\}$. [Sketch the set D.]

8. Calculate the integral $\iiint_D \frac{x_3}{\sqrt[6]{x_1^2 + x_2^2}} dA$ where $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 1\}$. [Use cylindrical coordinates.]

Normering:

1	2	3	4	5	6	7	8
a) 1	a) 2	a) 1	a) 2	4	3	4	4
b) 2	b) 1	b) 3	b) 1				
c) 1	c) 3		c) 1				
d) 1	d) 2						
5	8	4	4	4	3	4	4

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\#\text{punten}}{4} + 1$$