

1. a) We onderzoeken eerst of de reeks absoluut convergent is. Vergelijk daartoe de absolute waarde van de algemene term met $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ en pas de limiettest toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{n}}{n^2 - n + 1} : \frac{1}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{n} + n^2}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Omdat $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergeert (p -reeks met $p = \frac{3}{2}$), convergeert $\sum \left| (-1)^n \frac{2 + \sqrt{n}}{n^2 - n + 1} \right|$ ook. Er is dus sprake van absolute convergentie.

- b) Merk ten eerste op dat $\ln(n^2) = 2 \ln n$. Bekijk vervolgens

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n^2)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 \ln n}.$$

Omdat $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ voor $n \geq 2$ en omdat $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert, divergeert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 \ln n}$ ook volgens de vergelijkingstest. Er is dus geen sprake van absolute convergentie. Pas nu de alternerende reeks test toe op de oorspronkelijke reeks: (i) de reeks is alternerend, (ii) de algemene term gaat naar 0 en (iii) de rij $\left\{ \frac{1}{\ln(n^2)} \right\}$ is dalend. Dus de reeks is convergent, maar niet absoluut convergent, dus relatief convergent.

2. a) De bewering is juist. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert moet de algemene term naar 0 gaan. Maar dat betekent dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ zeker niet naar 0 gaat. Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergeert volgens de algemene-term test.
- b) De bewering is onjuist. Kies bijvoorbeeld $a_n = 1$. Dan is ook $\frac{1}{a_n} = 1$. Verder divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (algemene term gaat niet naar 0) en dus divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ ook.

3. a) Voor $x = 0$ geldt $f_n(x) = 0$ en voor iedere andere $x \in [-1, 1]$ geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, dus de puntsgewijze limiet is gelijk is aan $f(x) = 0$. Laat nu $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven zijn. Kies $n^* = \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Dan volgt voor alle $n > n^*$ dat

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1 + nx^2} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \left| \frac{1/\sqrt{n}}{1 + 1} \right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n^*}} = \varepsilon.$$

Hierbij is bij (*) gebruik gemaakt van het volgende:

Stel $g(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$. Dan is $g'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$ en dus volgt uit $g'(x) = 0$ dat $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Via een tekenoverzicht is te zien dat $|g(x)|$ zijn maximum aanneemt voor $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Die waarde is bij (*) gebruikt.

b) Bereken $f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$. Als $x = 0$, dan is $f'_n(x) = 1$ voor alle n . Voor de overige $x \in [-1, 1]$ geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0$. De puntsgewijze limiet van $\{f'_n(x)\}$ is dus niet continu op $[-1, 1]$ terwijl alle $f'_n(x)$ wel continu zijn op $[-1, 1]$. Er kan dus geen sprake zijn van uniforme convergentie.

4. We willen graag de som en integraal verwisselen. Dat kan bij uniforme convergentie van de reeks. Om die aan te tonen gebruiken we Weierstrass' M-test. Er geldt:

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ convergeert, dus convergeert } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \text{ uniform.}$$

Dan volgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}. \end{aligned}$$

Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van het feit dat

$$\begin{cases} n = 2k : & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0, \\ n = 2k + 1 : & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k. \end{cases}$$

5. Stel $a_n = \frac{(x+2)^n}{3^n n^2}$ en gebruik de quotiënttest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x+2|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x+2|}{3}.$$

Als $\frac{|x+2|}{3} < 1$, dus als $-5 < x < 1$, dan is de reeks absoluut convergent. Als $\frac{|x+2|}{3} > 1$, dus als $x < -5$ of $x > 1$, dan divergeert de reeks. Nu nog de randpunten $x = -5$ en $x = 1$ bekijken:

$x = 1$ geeft $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dus convergent (p -reeks met $p = 2$).

$x = -5$ geeft $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, dus ook (absoluut) convergent

Het convergentie-interval is dus $[-5, 1]$.

6. a) We starten met de bekende Taylorreeks rond $t = 0$ voor $\sin t$, die naar $\sin t$ convergeert voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dus: $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, waaruit volgt dat

$$f(x) = x^2 \sin(2x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

die voor alle $x \in \mathbb{R}$, convergeert naar $f(x)$. Om deze reeksen goed met elkaar te kunnen vergelijken is het handig de laatste reeks om te schrijven tot

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=-1}^{\infty} a_{2n+3} x^{2n+3}.$$

Nu vinden we dus:

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_1 = 0, \\ a_{2n+3} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

- b) Algemeen geldt als een Taylorreeks (rond $x = 0$) van een oneindig vaak in 0 differentieerbare functie f naar f convergeert dat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}.$$

Dus voor de 9-de afgeleide van f in 0 hebben we a_9 nodig. Met onderdeel a) volgt dan dat $f^{(9)}(0) = 9! \cdot a_9 = 9! \cdot \frac{(-1)^3 2^7}{7!} = -9 \cdot 8 \cdot 2^7 = -9216$.

7. a)

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-6 - 2 + 3}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{5}{14}.$$

- b) We berekenen eerst een normaalvector op het vlak:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.$$

Het vlak gaat verder door $(0, 0, 0)$, dus is de vergelijking van het vlak:

$$-7(x - 0) - 11(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \quad \text{oftewel} \quad z = 7x + 11y.$$

8. a) De bewering is juist. De punten liggen allemaal binnen of op een cirkel om de oorsprong met straal $\sqrt{2}$. Immers, voor alle $n, m \in \mathbb{N}$ geldt

$$\left\| \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) - (0, 0) \right\| = \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{2}.$$

- b) De bewering is niet juist. Het punt $(0, 0)$ is een verdichtingspunt van V (iedere r -cirkelschijf om $(0, 0)$ bevat een punt van V), maar $(0, 0)$ is geen element van V . V bevat dus niet al zijn verdichtingspunten en dus is V niet gesloten.
- c) De bewering is juist. Immers, stel dat voor zekere m en n het punt $P = (\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ inwendig punt is van V . Dan zou er een $r > 0$ moeten bestaan waarvoor geldt dat de r -cirkelschijf rond P geheel binnen V ligt. Maar zo'n cirkelschijfje bevat ook punten van de vorm $Q = (x, y)$ met $x \notin \mathbb{Q}$ en/of $y \notin \mathbb{Q}$ en dus kan Q nooit element zijn van V en dus is P geen inwendig punt van V .

9. a) Voor $c = 0$ gaat het om de lijnen $y = x$ en $y = -x$. Voor $c = 1$ is het de lijn $y = 0$. En voor $c = -1$ is het de lijn $x = 0$.
- b) De functie f is niet continu in $(0, 0)$. Dit is meteen al duidelijk uit onderdeel a), omdat rond $(0, 0)$ drie verschillende niveaукrommen samen komen. Het kan ook aangetoond worden via onderstaande limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$