

1. Ga na of de volgende reeksen convergeren. Vermeld in geval van convergentie of de reeks absoluut convergent of relatief convergent is.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + \sqrt{n}}{n^2 - n + 1}, \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2)}.$$

2. Laat $\{a_n\}$ een rij met positieve termen zijn. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan divergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.
 b) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3. Op het interval $[-1, 1]$ is de functiereeks $\{f_n(x)\}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, n \geq 1.$$

- a) Toon aan dat $\{f_n(x)\}$ uniform convergeert op $[-1, 1]$.
 b) Toon aan dat $\{f'_n(x)\}$ puntsgewijs convergeert op $[-1, 1]$ naar een functie $g(x)$, maar niet uniform.

4. Bewijs de volgende identiteit:

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

[Verklaar hierbij al je stappen!]

5. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n n^2}.$$

Bepaal het convergentie-interval van deze machtreeks.

Z.O.Z.

6. De Taylorreeks van de functie $f(x) = x^2 \sin(2x)$ rond $x = 0$ is gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- Bepaal a_n voor alle $n \geq 0$ en geef aan voor welke x de reeks convergeert naar $f(x)$.
- Bereken m.b.v. onderdeel a) $f^{(9)}(0)$, de 9-de afgeleide van f in 0.

7. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{en} \quad \vec{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

- Bereken $\cos \theta$, waarbij θ de (scherpe) hoek is tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$.
- Geef een vergelijking van het vlak dat door de oorsprong gaat en waarin de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ liggen.

8. Bekijk de verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$V = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn. Als de bewering waar is, geef dan een bewijs. Als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- V is een begrensde verzameling in $\mathbb{R}^2$.
- V is een gesloten verzameling in $\mathbb{R}^2$.
- V bevat geen inwendige punten.

9. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Schets de niveaукrommen $f(x, y) = c$ voor $c = 0, 1$ en -1 .
- Ga na of f continu is in $(x, y) = (0, 0)$.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 4	4 : 5	5 : 4	6 : a) 4	7 : a) 2	8 : 6	9 : a) 2
b) 3	b) 2	b) 2			b) 2	b) 2		b) 2
6	4	6	5	4	6	4	6	4

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$