Faculteit der Exacte Wetenschappen	2e deeltentamen Analysis II
Afdeling Wiskunde	27-05-2016
Vrije Universiteit	08:45-11:30 uur

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Bereken $f_x(0,0)$ en $f_y(0,0)$.
   b) Is f differentieerbaar in $(0,0)$?
   c) Zij $v = (a,b)$ met $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Bepaal de richtingsafgeleide van f in het punt $(0,0)$ in de richting van de vector v. (Gebruik de definitie)

2. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heeft continue partiële afgeleiden van de tweede orde op heel $\mathbb{R}^2$. Gegeven is $z = f(u,v)$ met $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ in termen van x en y, en partiële afgeleiden van f.

3. Vind de kritische punten van $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+y)^2$ en bepaal hun aard.

4. Gebruik de Lagrange methode om de kortste afstand van de oorsprong naar het oppervlak $xyz^2 = 2$ te vinden.

5. Beschouw de vergelijking $x^2 z + yz^2 = 2$.

   a) Laat zien dat de vergelijking op een unieke manier voor z in termen van x en y in een omgeving van $(1,1,-2)$ kan worden opgelost.
   b) Laat $z(x,y)$ de bijbehorende oplossing zijn. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)$.

6. Bereken de dubbelintegraal

$$\int\int_G y^2 \sin x^4 dxdy$$

   waarbij de verzameling G de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(3,0)$ en $(3,2)$ in het x,y-vlak is.

7. Gebruik substitutie om de dubbelintegraal $\int\int_G \frac{y}{x} dA$ te berekenen, waarbij

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq \frac{x}{4}\}.$$

8. Voor welke waarden van $k \in \mathbb{R}$ convergeert de integraal

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{k(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV?$$

   (gebruik bolcoördinaten).

Engels op de achterkant

1. The function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is defined by
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   a) Calculate $f_x(0,0)$ en $f_y(0,0)$.
   b) Is f differentiable in $(0,0)$?
   c) Let $v = (a,b)$ with $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Calculate the directional derivative of f in the point $(0,0)$ in de direction of the vector v. (Use the definition)

2. De function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ has continuous second order partial derivatives on $\mathbb{R}^2$. Let $z = f(u,v)$ with $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Compute $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ in terms of x and y, and partial derivatives of f.

3. Find the critical points of $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+y)^2$ and determine their nature.

4. Use the Lagrange method to determine the shortest distance from the origin to the surface $xyz^2 = 2$.

5. Consider the equality $x^2 z + yz^2 = 2$.
   a) Show that this equation defines z as an implicit function of (x,y) in a neighborhood of $(1,1,-2)$.
   b) Let $z(x,y)$ be the corresponding solution. Calculate $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)$.

6. Calculate de double integral
$$\int\int_G y^2 \sin x^4 dxdy$$
   where the set G is the triangle with extreme points $(0,0)$, $(3,0)$ en $(3,2)$ in the x,y-plane.

7. Use change of coordinates to compute the double integral $\int\int_G \frac{y}{x} dA$, where
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq \frac{x}{4}\}.$$

8. For which values of $k \in \mathbb{R}$ does the integral
$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{k(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$$
   converge? (use spherical coordinates).

Normering:

1 :	2 :	3 :	4 :	5 :	6 :	7 :	8 :
5	4	6	5	4	3	4	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\#\text{punten}}{4} + 1$$