

1. a) Vergelijk de algemene term met $\frac{1}{n^2}$ en pas de limiettest toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 2}{n^4 - \sqrt{n} + 3} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^3 + 2n^2}{n^4 - \sqrt{n} + 3} = 1.$$

Omdat $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert (p -reeks met $p = 2$), convergeert $\sum \frac{n^2 + n + 2}{n^4 - \sqrt{n} + 3}$ ook. Er is dus sprake van absolute convergentie (alle termen zijn al positief).

- b) Merk op dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}} = 1$. De algemene term gaat dus niet naar 0 en daarom is de reeks divergent.
- c) Bekijk eerst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Omdat $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ voor $n \geq 3$ en omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert, divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ ook volgens de vergelijkingstest. Er is dus geen sprake van absolute convergentie. Pas nu de alternerende reeks test toe op de oorspronkelijke reeks: (i) de reeks is alternerend, (ii) de algemene term gaat naar 0 ("n wint van $\ln(n)$ ", of pas evt. l'Hospital toe) en (iii) de rij $\left\{ \frac{\ln(n)}{n} \right\}$ is uiteindelijk dalend (bekijk $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, dan $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$ voor $x > e$, dus is f dalend vanaf $x = e$). Dus de reeks is convergent, maar niet absoluut convergent, dus relatief convergent.

2. a) De bewering is juist. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert moet de algemene term naar 0 gaan. Dus vanaf zekere n^* geldt dat $0 < |a_n - 0| = a_n < 1$ voor alle $n > n^*$. Bekijk nu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ en pas de vergelijkingstest toe: omdat vanaf zekere n^* geldt dat $0 < a_n b_n < b_n$ en omdat $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert, convergeert ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. [Alternatieve methode: Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert geldt $a_n \rightarrow 0$. Verder $a_n > 0$, $b_n > 0$ en ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent. Dan volgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dus convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ volgens de limiettest.]
- b) De bewering is onjuist. Kies bijvoorbeeld $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. Dan divergeren zowel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, maar convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. a) Laat $0 < b < 1$. Voor iedere $x \in [0, b]$ geldt dan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, dus dat de puntsgewijze limiet gelijk is aan $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2x^n}{2+x^n} = \frac{1}{2}$. Laat nu $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven zijn. Kies $n^* = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(b)}$. Dan volgt dat voor alle $n > n^*$ geldt dat

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1+2x^n}{2+x^n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3x^n}{2(2+x^n)} \right| \leq \frac{3}{4} b^n < b^n < \varepsilon.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van $x^n \geq 0$ en $x^n \leq b^n$. De convergentie is dus uniform op $[0, b]$.

b) Op $[0, 1]$ is de puntsgewijze limiet gelijk aan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

De puntsgewijze limiet is dus niet continu op $[0, 1]$ terwijl $f_n(x)$ wel continu is op $[0, 1]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Er kan dus geen sprake zijn van uniforme convergentie.

4. We gebruiken de Weierstrass M-test. Bekijk daarvoor $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$ en bepaal het maximum op $[-a, a]$ voor alle n . We vinden $f'(x) = \frac{n(1-nx^2)}{n^2(1+nx^2)^2} = 0$ voor $x = \pm 1/\sqrt{n}$. Voor n voldoende groot liggen $x = \pm 1/\sqrt{n}$ in $[-a, a]$. Met een tekenverloop is dan eenvoudig te zien dat daar dan geldt dat $|f_n(x)| \leq |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = M_n$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert (p -reeks met $p = \frac{3}{2}$) volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ uniform convergent is op $[-a, a]$.

5. Stel $a_n = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \sqrt{n}}$ en gebruik de quotiënttest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x-1|^2}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{|x-1|^2}{4}.$$

Als $\frac{|x-1|^2}{4} < 1$, dus als $-1 < x < 3$, dan is de reeks absoluut convergent. Als $\frac{|x-1|^2}{4} > 1$, dus als $x < -1$ of $x > 3$, dan divergeert de reeks. Nu nog de randpunten $x = -1$ en $x = 3$ bekijken:

Zowel $x = -1$ als $x = 3$ geeft $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, dus een divergente reeks (p -reeks met $p = \frac{1}{2}$). Het convergentie-interval is dus $(-1, 3)$.

6. We starten met de bekende Taylorreeks rond $x = 0$ voor $\frac{1}{1-x}$, die naar $\frac{1}{1-x}$ convergeert voor alle $x \in (-1, 1)$. Dus: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, waaruit volgt dat

$$f(x) = \frac{x}{2-x^2} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{1-(x^2/2)} = \frac{1}{2}x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

die voor $|x^2/2| < 1$, dus voor $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, convergeert naar $f(x)$. Om deze reeksen goed met elkaar te kunnen vergelijken is het handig de laatste reeks om te schrijven tot

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Nu vinden we dus:

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

7. a) De bewering is niet juist. Kies bijvoorbeeld $G = \{\mathbf{0}\}$ (de nulvector in $\mathbb{R}^n$). Dan bestaat er geen punt $\mathbf{p} \in G$, met $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, zó dat $\|\mathbf{p} - \mathbf{0}\| < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$. Dus kan $\mathbf{0}$ geen limietpunt zijn van G .
- b) De bewering is juist. Omdat G een gesloten verzameling is, moet G^c een open verzameling zijn. Als $\mathbf{p}$ een randpunt is van G^c , dan is er om $\mathbf{p}$ een open bol te leggen die zowel een punt van G als een punt van G^c moet bevatten. Dus $\mathbf{p}$ is geen inwendig punt van G^c en omdat G^c open is, en dus ieder punt van G^c een inwendig punt moet zijn, moet $p \in G$.
- c) De bewering is niet juist. Kies bijvoorbeeld weer $G = \{\mathbf{0}\}$. De enige niet-lege deelverzameling van G is G zelf en G is gesloten (zie ook a)).
8. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \varepsilon/2$ dan geldt voor alle $\mathbf{x} = (x, y)$ met $\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| < \delta$, dus met $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, dat

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^3 + (\sqrt{x^2 + y^2})^3}{x^2 + y^2} = \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $f(x, y)$ is continu in $(x, y) = (0, 0)$.